

Arii

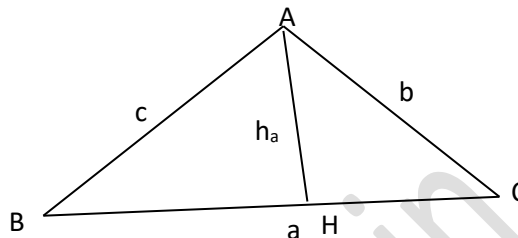
i) Considerații teoretice

Fie triunghiul $\triangle ABC$, cu notațiile consacrate:

$$BC = a, AC = b, AB = c,$$

$$m(A) = A, h_a = AH (AH \perp BC)$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$



S este aria $\triangle ABC$

R – raza cercului circumscris triunghiului,

r – raza cercului înscris triunghiului.

i) Formule pentru aria triunghiului

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

$$S = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{bc \sin A}{2} = \frac{ac \sin B}{2}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ - formula lui Heron;}$$

$$S = \frac{abc}{4R}, S = r \cdot p, S = \frac{a^2 \sin B \cdot \sin C}{2 \sin A}$$

ii) Exerciții rezolvate

1. Calculați aria triunghiului $\triangle ABC$, știind că $AB = 8, BC = 6, m(\angle ABC) = 30^\circ$.

Rezolvare:

$$S = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin B}{2} = \frac{8 \cdot 6 \cdot \sin 30^\circ}{2} = \frac{48 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

2. Calculați aria triunghiului $\triangle ABC$, știind că $AB = BC = 4, m(\angle B) = 120^\circ$.

Rezolvare:

$$S = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin B}{2} = \frac{4 \cdot 4 \cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{16 \cdot \sin 120^\circ}{2} = 8 \cdot \sin 120^\circ$$

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S = 4\sqrt{3}.$$

3. Să se calculeze aria triunghiului $\triangle ABC$ dacă $b = 9, m(\angle A) = 45^\circ, m(\angle C) = 75^\circ$.

Rezolvare:

$$m(A) + m(B) + m(C) = 180^\circ \Rightarrow 45^\circ + m(B) + 75^\circ = 180^\circ \Rightarrow m(B) = 60^\circ$$

Aplicăm teorema sinusurilor

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{9}{\sin 60^\circ} = \frac{BC}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow BC = \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow BC = \frac{9\sqrt{6}}{3} \Rightarrow BC = 3\sqrt{6}$$

$$S = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin C}{2} = \frac{9 \cdot 3\sqrt{6} \cdot \sin 75^\circ}{2} = \frac{27\sqrt{6} \cdot \sin 75^\circ}{2}$$

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{27\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \Rightarrow S = \frac{27\sqrt{12}}{4} \Rightarrow S = \frac{27 \cdot 2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S = \frac{27\sqrt{3}}{2}.$$

4. Să se calculeze aria triunghiului $\triangle ABC$ dacă $AB = 5, AC = 7$ și $BC = 9$.

Rezolvare:

Folosim formula lui Heron: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde $p = \frac{a+b+c}{2}$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{AB+AC+BC}{2} = \frac{5+7+9}{2} = \frac{21}{2}$$

$$p-a = p-BC = \frac{21}{2} - 9 = \frac{3}{2}$$

$$p-b = p-AC = \frac{21}{2} - 7 = \frac{7}{2}$$

$$p-c = p-AB = \frac{21}{2} - 5 = \frac{11}{2}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{\frac{21}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{11}{2}} = \sqrt{\frac{21 \cdot 21 \cdot 11}{2 \cdot 2 \cdot 4}} = \frac{21}{2} \cdot \frac{\sqrt{11}}{2} = \frac{21\sqrt{11}}{4}$$

iii) Exerciții propuse

1. Calculați aria triunghiului $\triangle ABC$, știind că:

- i) $AC = 2, AB = 4, m(\angle BAC) = 30^\circ$;
- ii) $AB = AC = \sqrt{2}, m(\angle A) = 30^\circ$;
- iii) $AB = 2\sqrt{3}, AC = \sqrt{3}, m(\angle BAC) = 60^\circ$;
- iv) $AB = 10, AC = 4, m(\angle ABC) = 60^\circ$;
- v) $AB = AC = 6, m(\angle B) = 120^\circ$;
- vi) $AB = \sqrt{3}, AC = 3, m(\angle BAC) = 120^\circ$;
- vii) $AB = 6, BC = 4, m(\angle ABC) = 45^\circ$;
- viii) $AB = 5, AC = 6, m(\angle BAC) = 60^\circ$.

2. Să se calculeze aria triunghiului $\triangle ABC$ în cazurile:

- i) $a = 6, c = 8, B = \frac{\pi}{3}$;
- ii) $a = 6, b = 7, c = 8$;
- iii) $b = 9, m(\angle A) = 60^\circ, m(\angle C) = 75^\circ$;
- iv) $a = 6, C = \frac{\pi}{3}, A = \frac{\pi}{4}$;
- v) $a = \sqrt{6}, b+c = 3+\sqrt{3}, m(\angle A) = 60^\circ$;
- vi) $a = 2, m(\angle B) = 135^\circ, m(\angle A) = 30^\circ$;
- vii) $a = 5, b = 6, m(\angle C) = 30^\circ$.

3. Se consideră $\triangle ABC$ având aria egală cu 15. Să se calculeze $\sin A$ știind că $AB = 6$ și $AC = 10$.

4. Se consideră $\triangle ABC$ de arie egală cu 6, cu $AB = 3, BC = 8$. Să se calculeze $\sin B$.
5. Să se calculeze latura AB a $\triangle ABC$, știind că aria triunghiului este 7, $AC = 2$ și $m(\sphericalangle A) = 30^\circ$.
6. Să se calculeze aria paralelogramului $ABCD$ știind că:
- i) $AB = 6, BC = 8, m(\sphericalangle BAD) = 45^\circ$;
 - ii) $AB = 4, BD = 6, m(\sphericalangle ABD) = 30^\circ$.
7. În triunghiul oarecare $\triangle ABC$ se cunosc $A = \frac{\pi}{6}, C = \frac{5\pi}{12}$ și $BC = \sqrt{18}$. Să se calculeze AB, AC și aria triunghiului $\triangle ABC$.
8. În triunghiul isoscel $\triangle ABC$ se cunosc $m(\sphericalangle A) = 30^\circ, b = 3\sqrt{2}$. Determinați aria triunghiului $\triangle ABC$.