

Divizibilitatea polinoamelor

Fie $f, g \in \mathbb{C}[x]$, $g \neq 0$.

$f : g$ dacă $\exists h \in \mathbb{C}[x]$ a.î $f = g \cdot h$.

multiplu
a lui g

divizor
a lui f .

f divizibil cu g

$f : g (= g | f)$

g divide f

Proprietăți:

1. $f | f$ - reflexivă
2. $f | g$ și $g | h \Rightarrow f | h$ - tranzitivă
3. $f | g$ și $f | h \Rightarrow f | (\alpha g + \beta h)$, $f, g, h \in \mathbb{C}[x]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

Obs ① Dacă $f : g$ atunci orice rădăcină a polinomului g este rădăcină și pentru polinomul f (cel puțin).

② Divizorii de forma a și ag , $a \in \mathbb{C}^*$ se numesc divizori improprii ai lui g .

③ ceilalți divizori ai lui g se numesc divizori proprii.

Fie $f \in \mathbb{C}[x]$.

Def f - se numește irreductibil în $\mathbb{C}[x]$ dacă: $\begin{cases} \text{are cel puțin gradul} \\ \text{unu} \\ \text{nu are divizori} \\ \text{proprii.} \end{cases}$

Ex: ① $m = ?$, $m \in \mathbb{Z}$ a.î $f : g$, $f = x^3 + (m+1)x^2 - 2x + 3m$, $g = x+1$

$$f : g \Rightarrow f : (x+1) \Rightarrow f(-1) = 0.$$

$$f(-1) = (-1)^3 + (m+1) \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 3m = -1 + m + 1 + 2 + 3m = 4m + 2$$

$$4m + 2 = 0 \Rightarrow 4m = -2 \Rightarrow m = -\frac{2}{4} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

② $m, n = ?$, $m, n \in \mathbb{R}$ a.t. $f : g$, $f = x^3 + (2m+1)x^2 + mx - m - n$
 $g = (x-1)(x+1)$.

$$f : g \Rightarrow f : (x-1)(x+1) \Rightarrow \begin{cases} f : (x-1) \\ f : (x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{cases}$$

$$f(1) = 1^3 + (2m+1) \cdot 1^2 + m \cdot 1 - m - n = 1 + 2m + 1 + m - m - n = m + 2$$

$$f(-1) = (-1)^3 + (2m+1) \cdot (-1)^2 + m \cdot (-1) - m - n = -1 + 2m + 1 - m - m - n = m - 2m - n = -m - n$$

$$\begin{cases} m + 2 = 0 \\ m - 2m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ -2 - 2m = 0 \Rightarrow 2m = -2 \Rightarrow m = -1 \end{cases}$$

Obs ① Dacă $f : g$ atunci orice rădăcină a polinomului g este rădăcină și pentru polinomul f (cel puțin).

② Divizorii de forma a și ag , $a \in \mathbb{C}^*$ se numesc divizori improprii ai lui g .

③ Cei alți divizori ai lui g se numesc divizori proprii.

Def: Fie $f \in \mathbb{C}[x]$.
 f - se numește irreductibil în $\mathbb{C}[x]$ dacă: $\begin{cases} \text{are cel puțin gradul} \\ \text{unu} \\ \text{nu are divizori} \\ \text{proprii.} \end{cases}$

Ex: ① $m = ?$, $m \in \mathbb{R}$ a.t. $f : g$, $f = x^3 + (m+1)x^2 - 2x + 3m$
 $g = x+1$

$$f : g \Rightarrow f : (x+1) \Rightarrow f(-1) = 0$$

$$f(-1) = (-1)^3 + (m+1) \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 3m = -1 + m + 1 + 2 + 3m = 4m + 2$$

$$4m + 2 = 0 \Rightarrow 4m = -2 \Rightarrow m = -\frac{2}{4} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

$$(2) \quad m, n = ?, \quad m, n \in \mathbb{R} \quad \text{a.t.} \quad f \div g, \quad \begin{aligned} f &= x^3 + (2m+1)x^2 + mx - m - n \\ g &= (x-1)(x+1) \end{aligned}$$

$$f \div g \Rightarrow f \div (x-1)(x+1) \Rightarrow \begin{cases} f \div (x-1) \\ f \div (x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{cases}$$

$$f(1) = 1^3 + (2m+1) \cdot 1^2 + m \cdot 1 - m - n = 1 + 2m + 1 + m - m - n = m + 2$$

$$f(-1) = (-1)^3 + (2m+1) \cdot (-1)^2 + m \cdot (-1) - m - n = -1 + 2m + 1 - m - m - n = m - 2m - n = -m - n$$

$$\begin{cases} m + 2 = 0 \\ m - 2m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ -2 - 2m = 0 \Rightarrow 2m = -2 \Rightarrow m = -1 \end{cases}$$

$$(3) \quad m = ?, \quad m \in \mathbb{R} \quad \text{a.t.} \quad f \div g, \quad \begin{aligned} f &= x^4 + ix^3 + 2(i+1)x^2 + mx + 2m+1 \\ g &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

Aplicăm T. 1, R.

$$f \div g \Rightarrow r = 0.$$

$$\begin{array}{r} (x^4) + ix^3 + (2i+2)x^2 + mx + 2m+1 \\ -x^4 \qquad \qquad -x^2 \\ \hline \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} (x^2+1) \\ \hline (x^2+ix+(2i+1)) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} / (ix^3) + (2i+1)x^2 + mx \\ -ix^3 \qquad \qquad -ix \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} / (2i+1)x^2 + (m-i)x + 2m+1 \\ -(2i+1)x^2 \qquad \qquad -2i-1 \\ \hline \end{array}$$

$$/ (m-i)x + 2m-2i \quad \text{restul}$$

$$r = 0 \Rightarrow (m-i)x + 2m-2i = 0. \Rightarrow m-i = 0 \Rightarrow m = i.$$

④. Determinați c.m.m.d.c al polim. $f \approx g$, $f, g \in \mathbb{C}[x]$
 $f = x^3 - 3x + 2$, $g = x^2 + 2x$.

Folosim algoritmul lui Euclid.

- etapa 1 (împartim pe f la g)

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x + 2 & x^2 + 2x \\ -x^3 - 2x^2 & \\ \hline -2x^2 - 3x & \\ +2x^2 + 4x & \\ \hline x + 2 & \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2 + 2x \\ x - 2 \end{array}$$

$\pi_1 = x + 2$

- etapa 2 (împartim pe g la π_1)

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 2x & x + 2 \\ -x^2 - 2x & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} x + 2 \\ x \end{array}$$

$\pi_2 = 0$

Aveam rîsul de polinoame: $f, g, x+2, 0$.

c.m.m.d.c a lui $f \approx g \stackrel{\text{not}}{=} (f, g) = \text{ultimul rest nenul} = x + 2$