

Rezolvarea ecuațiilor algebrice cu coef în $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$f \in K[x]$, unde $K = \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. și

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \text{ ecuație algebrică}$$

① Dacă $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ și α -sol a ec. atunci:

$$\alpha \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha \mid a_0. \text{ (adică } \alpha \text{ se găsește printre divizorii term. liber)}$$

Ex: ① $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$. Rez în $\mathbb{Z}$ ec. dată.

Căutăm sol ec printre divizorii termenului liber.

$$D_6 = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}.$$

	x^3	x^2	x^1	x^0	Concluzii
	1	2	-5	-6	
1	1	3	-2	-8	1 nu este soluție
-1	1	1	-6	0	-1 este soluție $\Rightarrow x_1 = -1$
2	1	3	0	////	2 este soluție $\Rightarrow x_2 = 2$
	x^1	x^0			

Ec algebrică se poate ca: $(x+1)(x-2)(x+3) = 0$.

$$\parallel \Rightarrow x_3 = -3$$

② $a = ?$, $a \in \mathbb{Z}$ și să se rez ec $x^3 - 3x^2 + ax + 1 = 0$. știind că are soluții nr întregi

$$D_1 = \{\pm 1\} \Rightarrow \text{soluțiile pot fi } 1 \text{ sau } -1$$

x^3	x^2	x^1	x^0
1	-3	a	1
1	1	-2+a	a-1
x^2	x^1	x^0	

$$1 = 0 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$C(x) = x^2 - 2x - 1$$

$$x^3 - 3x^2 + x + 1 = (x-1)(x^2 - 2x - 1) =$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^2-2x-1=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = 1$$

$$\Rightarrow \Delta = 8$$

$$x_2 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$$

$$x_3 = 1+\sqrt{2}$$



(22)

Facem schema lui Horner pt $x = -1$

x^3	x^2	x^1	x^0
1	-3	a	1
-1	1	-4	a+4
	x^2	x^1	x^0

$$-a-3=0 \Rightarrow a=-3.$$

$$x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0.$$

$$(x+1)(x^2 - 4x + 1) = 0 \quad \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x^2-4x+1=0 \end{cases}$$

$$\Delta = 12 \quad \begin{cases} x_1 = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3} \\ x_2 = 2+\sqrt{3} \end{cases}$$

② Dacă $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}$ și α -sol a ec atunci:

$$\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \quad (p, q) = 1 \Rightarrow p|a_0 \text{ și } q|a_m.$$

(prime)

*p este divizor al term. liber
q este divizor al coef dominant*

Ex: ① Rez ~~ec~~ ec $12x^3 - 8x^2 - 13x - 3 = 0$. (răd. raționale)

Verificăm mai întâi dacă ec are răd. întregi.

$$D_3 = \{ \pm 1; \pm 3 \}$$

	x^3	x^2	x^1	x^0	Concluzii
-1	12	-8	-13	-3	nu este sol
1	12	-20	7	-10	nu este sol
3	12	4	-9	-12	nu este sol
3	12	28	71	210	nu este sol
-3	12	-44	119	360	nu este sol

$\Rightarrow$ ec nu are răd. întregi.

Cautăm răd. raționale ale ec $\Rightarrow \alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \quad \begin{matrix} p|3 \\ q|12 \end{matrix}$

$$p|3 \Rightarrow p \in \{ \pm 1; \pm 3 \}$$

$$q|12 \Rightarrow q \in \{ \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12 \} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p}{q} \in \{ \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{3}; \pm \frac{1}{4}; \pm \frac{1}{6}; \pm \frac{1}{12}; \pm \frac{3}{2}; \pm \frac{3}{4} \}$$

||

	x^3	x^2	x^1	x^0
	12	-8	-13	-3
$-\frac{1}{2}$	12	-14	-6	0
	x^2	x^1	x^0	

$$-\frac{1}{2} \cdot 12 - 8 = -6 - 8 = -14$$

$$-\frac{1}{2} \cdot (-13) - 3 = 6.5 - 3 = 3.5$$

$$-\frac{1}{2} \cdot (-3) - 3 = 1.5 - 3 = -1.5$$

$$(x + \frac{1}{2})(12x^2 - 14x - 6) = 0$$

$$x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$12x^2 - 14x - 6 = 0 \quad | :2$$

$$6x^2 - 7x - 3 = 0$$

$$\Delta = 49 + 72 = 121 \quad \sqrt{\Delta} = 11$$

$$x_1 = \frac{7-11}{12} = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{7+11}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

$$S = \{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$$

③ $f \in \mathbb{Q}[x]$ și $\alpha = a + b\sqrt{c}$ este soluție a ec date
atunci și conjugatul ei este soluție adică $a - b\sqrt{c}$

Exp: Rez ec $x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0$ știind că are sol $x_1 = 1 + \sqrt{2}$

$$x_1 = 1 + \sqrt{2} \text{ sol} \Rightarrow x_2 = \bar{x}_1 = 1 - \sqrt{2} \text{ este sol.}$$

	x^3	x^2	x^1	x^0
	1	-4	3	2
$1 + \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2} - 4 = -3 + \sqrt{2}$	$(1 + \sqrt{2})(-3 + \sqrt{2}) + 3 = -3 - 3\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2 + 3 = 2 - 2\sqrt{2}$	$(1 + \sqrt{2})(2 - 2\sqrt{2}) + 2 = 2 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 4 + 2 = 0$
$1 - \sqrt{2}$	1	$1 - \sqrt{2} - 3 + \sqrt{2} = -2$	$(1 - \sqrt{2})(-2) + 2 - 2\sqrt{2} = -2 + 2\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2} = 0$	
	x^1	x^0		

$$\text{Deci, } x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = \underbrace{\left[x - (1 + \sqrt{2}) \right]}_0 \underbrace{\left[x - (1 - \sqrt{2}) \right]}_0 \underbrace{(x - 2)}_0$$

$$x_1 = 1 + \sqrt{2}$$

$$x_2 = 1 - \sqrt{2}$$

$$x_3 = 2$$

④ Dacă $f \in \mathbb{R}[x]$. și $\boxed{\alpha = a + bi} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ este rădăcină a ec. date
atunci și conjugatul ei este rădăcină. adică $\boxed{\overline{\alpha} = a - bi}$

Ex: Rez în $\mathbb{C}$ ec $2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$ știind că $x_1 = i$ rădăcină

f are coef. reali $\left| \begin{array}{l} x_1 = i \text{ rădăcină} \end{array} \right. \Rightarrow x_2 = \overline{x_1} = \overline{i} = -i \text{ este rădăcină.}$

$$x^2 - Sx + P = 0, \quad S = x_1 + x_2 = i - i = 0.$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = i \cdot (-i) = -i^2 = 1.$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 = 0.$$

Prin urmare, $2x^3 - x^2 + 2x - 1 \div (x^2 + 1)$.

Aplicăm T. Î.R.

$$\begin{array}{r|l} (2x^3) - x^2 + 2x - 1 & (x^2 + 1) \\ -2x^3 & 2x - 1 \\ \hline & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} / -x^2 & / -1 \\ +x^2 & +1 \\ \hline / & / \end{array}$$

$$2x^3 - x^2 + 2x - 1 = (x^2 + 1)(2x - 1)$$

$$\Rightarrow (x^2 + 1)(2x - 1) = 0.$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \\ i, -i & & \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2}, i, -i \right\}$$

