

Ecuatii reciproce

- O ecuație alg cu coef în $\mathbb{C}$, $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ este ecuație reciprocă

dacă $\boxed{a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, \dots}$

- $\boxed{ax^3 + bx^2 + bx + a = 0}$ - ec reciprocă de grad 3.

➤ Obs: Ec reciprocă de grad 3 cu soluția $\boxed{x = -1}$

Exp: Put în $\mathbb{C}$, ec. $x^3 - 7x^2 - 7x + 1 = 0$.

Obs cō. $\begin{matrix} a=1 \\ b=-7 \\ c=-7 \\ d=1 \end{matrix} \Rightarrow$

coef termenilor egal deștati sunt egali
 $\Rightarrow$ avem de rez o ec reciprocă de grad 3.

$\Rightarrow \boxed{x = -1}$ soluție.

	x^3	x^2	x^1	x^0
	1	-7	-7	1
-1	1	-8	1	0
	x^2	x^1	x^0	

$$\Rightarrow (x+1)(x^2 - 8x + 1) = 0.$$

$$\Delta = 64 - 4 = 60 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{15}$$

$$x_1 = \frac{8 - 2\sqrt{15}}{2} = \frac{2(4 - \sqrt{15})}{2} = 4 - \sqrt{15}$$

$$x_2 = 4 + \sqrt{15}$$

$$S = \{-1; 4 - \sqrt{15}; 4 + \sqrt{15}\}$$

- $\boxed{ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0}$ - ec reciprocă de grad 4

Etape de rezolvare:

- împărțim toți termenii ec prin x^2
- se grupează term cu ac. coef $\Rightarrow a(x^2 + \frac{1}{x^2}) + b(x + \frac{1}{x}) + c = 0$.
- Not $\boxed{x + \frac{1}{x} = t} \Rightarrow \boxed{x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2}$
- ne rez ec de grad 2 în t : $a(t^2 - 2) + bt + c = 0 \dots$
- $x + \frac{1}{x} = t_1, x + \frac{1}{x} = t_2$ etc

Ex: Rez în $\mathbb{C}$, ec $x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 7x + 1 = 0$

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -7 \\ c &= 12 \\ d &= -7 \\ e &= 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ coef termenilor egal departati sunt egali
 $\Rightarrow$ ec reciproca de grad 4.

$$x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 7x + 1 = 0 \quad | : x^2$$
$$\underbrace{x^2 - 7x + 12} - \underbrace{\frac{7}{x}} + \underbrace{\frac{1}{x^2}} = 0.$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 12 = 0$$

$$\text{Not } \boxed{x + \frac{1}{x} = t} \Rightarrow \boxed{x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2}$$

$$t^2 - 2 - 7t + 12 = 0 \Rightarrow t^2 - 7t + 10 = 0$$

$$\Delta = 9 \quad \begin{cases} t_1 = \frac{7-3}{2} = 2 \\ t_2 = \frac{7+3}{2} = 5. \end{cases}$$

$$x + \frac{1}{x} = t_1 \Rightarrow \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 + 1 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0.$$

$$\boxed{x_1 = x_2 = 1}$$

$$x + \frac{1}{x} = t_2 \Rightarrow \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = 5 \Rightarrow x^2 + 1 = 5x$$

$$x^2 - 5x + 1 = 0.$$

$$\Delta = 25 - 4 = 21$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{21} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \\ x_2 = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}. \end{cases}$$

$$S = \left\{ 1; 1; \frac{5 - \sqrt{21}}{2}; \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \right\}$$

$$\boxed{ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0.}$$

- ec reciproca de grad 5

Etape: - $\boxed{x = -1}$ sol

- se obtine o ec reciproca de grad 4

$\Downarrow$

Ex: Rez în $\mathbb{C}$, ec $2x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x + 2 = 0$

$$\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=-1 \\ d=-1 \\ e=-1 \\ f=2 \end{cases}$$

coef termenilor egal departati sunt egali $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ ec reciproca de grad 5.

$\Rightarrow \boxed{x=-1}$ sol.

	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
	2	-1	-1	-1	-1	2
-1	(2)	(-3)	(2)	(-3)	(2)	(0)
	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	

$\Rightarrow (x+1)(2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 2) = 0$
 $\parallel$
 $0.$

$2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 2 = 0 \quad | : x^2$

ec reciproca de grad 4

$2x^2 - 3x + 2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 0.$

$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0.$

not $\boxed{x + \frac{1}{x} = t} \Rightarrow \boxed{x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2}$

$2(t^2 - 2) - 3t + 2 = 0 \Rightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0.$

$\Delta = 9 + 16 = 25 \quad \begin{cases} t_1 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \\ t_2 = \frac{3+5}{4} = 2. \end{cases}$

$x + \frac{1}{x} = t_1 \Rightarrow \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x^2 + 2 = -x$

$\Rightarrow 2x^2 + x - 2 = 0.$

$\Delta = 1 + 16$

$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}$

$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}$

$x + \frac{1}{x} = t_2 \Rightarrow \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Delta = 0, \quad x_1 = x_2 = 1$

$S = \left\{ -1; 1; 1; -\frac{1 - \sqrt{17}}{4}; -\frac{1 + \sqrt{17}}{4} \right\}$