

Ecuații trigonometrice

i) Considerații teoretice

Ecuațiile care conțin necunoscuta (necunoscutele) numai la argumentul funcțiilor trigonometrice se numesc **ecuații trigonometrice**.

Ecuațiile trigonometrice de tipul $\sin x = a, \cos x = a, \operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a, a \in \mathbb{R}$ se numesc **ecuații trigonometrice fundamentale**.

1. Ecuații trigonometrice fundamentale

a) Ecuația $\sin x = a$

Caz 1. Dacă $|a| > 1 (a > 1, a < -1)$ atunci ecuația $\sin x = a$ nu are soluții

Caz 2. Dacă $a \in [-1, 1]$ atunci:

$$\sin x = a \Rightarrow x \in \left\{ (-1)^k \arcsin a + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) Ecuația $\cos x = a$

Caz 1. Dacă $|a| > 1 (a > 1, a < -1)$ atunci ecuația $\cos x = a$ nu are soluții

Caz 2. Dacă $a \in [-1, 1]$ atunci:

$$\cos x = a \Rightarrow x \in \left\{ \pm \arccos a + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

c) Ecuația $\operatorname{tg} x = a$

Condiții de existență: $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

$$\operatorname{tg} x = a \Rightarrow x \in \left\{ \arctg a + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}, \forall a \in \mathbb{R}$$

d) Ecuația $\operatorname{ctg} x = a$

Condiții de existență: $x \in \mathbb{R} - \left\{ k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

$$\operatorname{ctg} x = a \Rightarrow x \in \left\{ \operatorname{arcc} \operatorname{ctg} a + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}, \forall a \in \mathbb{R}$$

2. Ecuații trigonometrice de tipul

$$\sin u(x) = \sin v(x), \cos u(x) = \cos v(x), \operatorname{tgu}(x) = \operatorname{tgv}(x), \operatorname{ctgu}(x) = \operatorname{ctgv}(x)$$

$$\sin u(x) = \sin v(x) \Rightarrow u(x) = (-1)^k \cdot v(x) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos u(x) = \cos v(x) \Rightarrow u(x) = \pm v(x) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tgu}(x) = \operatorname{tgv}(x) \Rightarrow u(x) = v(x) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctgu}(x) = \operatorname{ctgv}(x) \Rightarrow u(x) = v(x) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

3. Ecuații trigonometrice de tipul $f(\sin x) = 0, f(\cos x) = 0, f(\operatorname{tg} x) = 0, f(\operatorname{ctg} x) = 0$

Aceste ecuații se rezolvă prin metoda **utilizării necunoscutei auxiliare**, care reduce ecuația inițială la o ecuație care nu conține funcții trigonometrice.

Etape de rezolvare:

- se determină domeniul de definiție;
- se notează funcția necunoscută cu t ;
- se rezolvă ecuația de gradul al doilea în t ;
- se rezolvă ecuațiile trigonometrice fundamentale obținute.

3. Ecuații trigonometrice liniare $a \cos x + b \sin x + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}$

Metoda 1

Notăm $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, t \in \mathbb{R}$ și se folosesc formulele $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Se rezolvă ecuațiile algebrice de gradul al doilea.

Metoda 2

Se folosește formula fundamentală a trigonometriei $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Metoda 3 (metoda unghiului auxiliar)

Se împarte prin a sau b și se obține $\cos x + \frac{b}{a} \sin x + \frac{c}{a} = 0$

Notăm $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$

$$\cos x + \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow \cos(x - \alpha) = -\frac{c}{a} \cos \alpha$$

4. Ecuații trigonometrice omogene $a \cos^2 x + b \sin x \cos x + c \sin^2 x = d$

Metoda 1

Se folosesc formulele $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$, $\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$, $\sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t$

Folosind formulele de mai sus se transformă ecuația omogenă în ecuație liniară

Metoda 2

Se scrie $d = d(\cos^2 x + \sin^2 x)$

Se verifică dacă $\cos x = 0$ este soluție a ecuației obținute. În situația în care $\cos x \neq 0$, atunci se împarte ecuația data prin $\cos^2 x$ și se obține o ecuație de gradul al doilea în necunoscuta $\operatorname{tg} x = t$, $t \in \mathbb{R}$.

Se folosește formula $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

5. Ecuații simetrice în sin și cos

Metoda 1

Se notează $S = \sin x + \cos x$, $S \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $P = \sin x \cos x$, $S \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

Folosind notațiile de mai sus se ajunge la o ecuație algebrică condiționată.

Metoda 2

Se notează $\sin x = a$, $a \in [-1, 1]$, $\cos x = b$, $b \in [-1, 1]$ și se rezolvă sistemul de ecuații obținut.

6. Ecuații care se rezolvă prin transformarea sumei în produs și a produsului în sumă

Se folosesc formulele

$$\sin a \pm \sin b = 2 \sin \frac{a \pm b}{2} \cos \frac{a \mp b}{2}; \quad \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2};$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

ii) Exerciții rezolvate

1. Să se rezolve ecuația $\sin x = \frac{1}{2}$.

Rezolvare:

Metoda 1

$$\left. \begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \in [-1, 1] \end{array} \right| \Rightarrow x \in \left\{ (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \Rightarrow x \in \left\{ (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Metoda 2

$$\left. \begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \in [-1, 1] \end{array} \right| \Rightarrow x \in \left\{ \arcsin \frac{1}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \pi - \arcsin \frac{1}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2. Să se rezolve ecuația $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \in [-1, 1] \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \left\{ (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left\{ (-1)^k \cdot (-1) \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \Rightarrow x \in \left\{ (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3. Să se rezolve ecuația $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \in [-1, 1] \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \left\{ \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \Rightarrow x \in \left\{ \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

4. Să se rezolve ecuația $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} \cos x = -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \in [-1, 1] \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \left\{ \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \Rightarrow x \in \left\{ \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

5. Să se rezolve ecuația $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

Rezolvare:

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \Rightarrow x \in \left\{ \arctg(-\sqrt{3}) + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \Rightarrow x \in \left\{ -\arctg \sqrt{3} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left\{ -\frac{\pi}{3} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

6. Să se rezolve ecuația $\operatorname{ctgx} = 1$.

Rezolvare:

$$\operatorname{ctgx} = 1 \Rightarrow x \in \{\operatorname{arctg} 1 + k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

7. Să se rezolve ecuația $\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Rezolvare:

Metoda 1

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{2} = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + k\pi \Rightarrow 2x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Metoda 2

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{2} = \arcsin \frac{1}{2} + 2k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{2} = \pi - \arcsin \frac{1}{2} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}.$$

8. Să se rezolve ecuația $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rezolvare:

$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 3x + \frac{\pi}{4} = \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + 2k\pi \Rightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ 3x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi \\ 3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

9. Să se rezolve ecuația $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Rezolvare:

Impunem condiții de existență

$$\frac{\pi}{3} - x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow -x \neq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow x \neq -\frac{\pi}{6} - k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} - x = \arctg \frac{\sqrt{3}}{3} + k\pi \Rightarrow \frac{\pi}{3} - x = \frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow -x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} - k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

10. Să se rezolve ecuația $\operatorname{ctg}\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$.

Rezolvare:

Impunem condiții de existență

$$4x - \frac{\pi}{6} \neq k\pi \Rightarrow 4x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) &= -1 \Rightarrow 4x - \frac{\pi}{6} = \operatorname{arcctg}(-1) + k\pi \Rightarrow 4x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow 4x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow \\ \Rightarrow 4x &= -\frac{\pi}{12} + k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

11. Rezolvați ecuația trigonometrică $\sin 3x = \sin x$.

Rezolvare:

Metoda 1

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin x \Rightarrow \sin 3x - \sin x = 0 \\ \sin a - \sin b &= 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \Rightarrow 2 \sin \frac{3x-x}{2} \cos \frac{3x+x}{2} = 0 \Rightarrow \sin x \cos 2x = 0 \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = (-1)^k \underbrace{\arcsin 0}_0 + k\pi \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (1) \text{ sau}$$

$$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} = \frac{(2k+1)\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

Soluția este dată de reuniunea relațiilor (1) și (2)

$$S = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Metoda 2

$$\sin 3x = \sin x \Rightarrow 3x = (-1)^k x + k\pi$$

$$\text{Caz 1 Luăm } k = 2t \Rightarrow 3x = (-1)^{2t} x + 2t\pi \Rightarrow 3x = x + 2t\pi \Rightarrow x = t\pi, t \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Caz 2 Luăm } k = 2t+1 \Rightarrow 3x = (-1)^{2t+1} x + (2t+1)\pi \Rightarrow 3x = -x + (2t+1)\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x = (2t+1)\pi \Rightarrow x = \frac{(2t+1)\pi}{4}, t \in \mathbb{Z}$$

$$S = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

12. Rezolvați ecuația trigonometrică $\cos x = \cos 4x$.

Rezolvare:

Metoda 1

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos 4x \Rightarrow \cos x - \cos 4x = 0 \\ \cos a - \cos b &= -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \Rightarrow -2 \sin \frac{4x+x}{2} \sin \frac{4x-x}{2} = 0 \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\Rightarrow -2 \sin \frac{5x}{2} \sin \frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \sin \frac{5x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{5x}{2} = (-1)^k \underbrace{\arcsin 0}_0 + k\pi \Rightarrow \frac{5x}{2} = k\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \text{ sau } \sin \frac{3x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3x}{2} = (-1)^k \underbrace{\arcsin 0}_0 + k\pi \Rightarrow \frac{3x}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow S = \left\{ \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Metoda 2

$$\cos x = \cos 4x \Rightarrow 4x = \pm x + 2k\pi \Rightarrow \begin{cases} 4x - x = 2k\pi \\ 4x + x = 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} \\ x = \frac{2k\pi}{5} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$