

Elemente de logică matematică

i) Considerații teoretice

Propoziție, predicat, cuantificatori

O *propoziție matematică* este un enunț despre care are sens să spunem că, într-un anumit context, este adevărat sau fals. Dacă o propoziție este *adevărată*, i se atribuie valoarea de adevăr **A** sau **1**, iar dacă este *falsă* i se atribuie valoarea de adevăr **F** sau **0**.

Se numește *predicat* sau *propoziție cu variabile*, un enunț care conține una sau mai multe variabile, cărora atribuindu-le „valori” obținem propoziții adevărate sau false. După cum conțin 1,2,3,...,n variabile, predicatele se numesc *unare, binare, ternare,...,n-are*.

Predicatele li se pot atașa *cuantificatori*. Fie $p(x)$ un predicat unar, $x \in M$, M – mulțime.

Propoziția „există cel puțin un x din M astfel încât $p(x)$ ” se numește *propoziție existențială* atașată predicatului $p(x)$, care se notează „ $(\exists x)p(x)$ ”. Simbolul „ $\exists$ ” se citește *există* și se numește *cuantificator existențial*.

Propoziția „oricare ar fi x din M are loc $p(x)$ ” se numește *propoziție universală* atașată predicatului $p(x)$, care se notează „ $(\forall x)p(x)$ ”. Simbolul „ $\forall$ ” se citește *oricare ar fi* și se numește *cuantificator universal*.

Principalele operații logice sunt: negația, conjuncția, disjuncția, implicația și echivalența.

1) Negația - negația unei propoziții p este o altă propoziție, care este adevărată când p este falsă și este falsă când p este adevărată. Negația propoziției p se notează „*non p*” sau „ $\bar{p}$ ” sau „ $\neg p$ ”. Valoarea de adevăr a negației se pune în evidență prin tabelul următor:

p	$\bar{p}$
1	0
0	1

2) Conjuncția - conjuncția propozițiilor p, q este propoziția „ p și q ”, care este adevărată când ambele propoziții sunt adevărate și falsă în celelalte cazuri. Conjuncția propozițiilor p, q se notează „ $p \wedge q$ ”. Valoarea de adevăr a conjuncției se pune în evidență prin tabelul următor:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

3) Disjuncția – disjuncția propozițiilor p, q este propoziția „ p sau q ”, care este adevărată când cel puțin una dintre propozițiile p, q este adevărată și falsă în caz contrar. Disjuncția propozițiilor p, q se notează „ $p \vee q$ ”. Valoarea de adevăr a disjuncției se pune în evidență prin tabelul următor:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

4) Implicația – implicația propozițiilor p, q este propoziția „ p implică q ”, care este falsă atunci și numai atunci când p este adevărată și q este falsă. Implicația propozițiilor p, q se notează „ $p \rightarrow q$ ” sau „ $p \Rightarrow q$ ”.

Propoziția p se numește ipoteză, iar propoziția q se numește concluzie. Valoarea de adevăr a implicației se pune în evidență prin tabelul următor:

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

5) Echivalența – echivalența propozițiilor p, q este propoziția „ p echivalent cu q ”, care este adevărată atunci și numai atunci când ambele propoziții au aceeași valoare de adevăr. Echivalența propozițiilor p, q se notează „ $p \leftrightarrow q$ ” sau „ $p \Leftrightarrow q$ ”. Valoarea de adevăr a echivalenței se pune în evidență prin tabelul următor:

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Se numește *formulă a calculului propozițional* orice expresie logică obținută din propoziții simple cu ajutorul operatorilor logici.

Orice formulă se numește *tautologie* dacă are valoarea de adevăr 1, indiferent de propozițiile care o compun

Proprietăți ale operațiilor logice cu propoziții.

Oricare ar fi propozițiile p, q, r , negația, conjuncția, disjuncția, implicația și echivalența, au loc proprietățile:

1) Negația

- a) $(\overline{\overline{p}}) \leftrightarrow p$ - principiul dublei negații;
- b) $p \vee \overline{p}$ - tautologie;
- c) $p \wedge \overline{p}$ - principiul falsului exclus;

2) Conjuncția

- a) $(p \wedge p) \leftrightarrow p$ - reflexivitatea conjuncției;
- b) $(p \wedge q) \leftrightarrow q \wedge p$ - comutativitatea conjuncției;
- c) $[(p \wedge q) \wedge r] \leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ - asociativitatea conjuncției;

3) Disjuncția

- a) $(p \vee p) \leftrightarrow p$ - reflexivitatea disjuncției;
- b) $(p \vee q) \leftrightarrow q \vee p$ - comutativitatea disjuncției;
- c) $[(p \vee q) \vee r] \leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$ - asociativitatea disjuncției;

4) Implicația

- a) $p \rightarrow p$ - tautologie;
- b) $[(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)] \leftrightarrow (p \rightarrow r)$ - tautologie (tranzitivitatea implicației);
- c) $p \rightarrow (p \vee q)$ - tautologie;
- d) $(p \wedge q) \rightarrow p$ - tautologie;

5) Echivalența

- a) $\overline{p \vee q} \leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$; $\overline{p \wedge q} \leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$ - legile lui de Morgan;
- b) $p \rightarrow q \leftrightarrow p \wedge \overline{q}$;
- c) $[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ - distributivitatea disjuncției față de conjuncție;
- d) $[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ - distributivitatea conjuncției față de disjuncție;
- e) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$.

ii) Exerciții rezolvate

1. Precizați care dintre enunțurile următoare sunt propoziții:

i) Pătratul este paralelogram;

ii) $2x - 1 = 5, x \in \mathbb{R}$;

iii) Partea întreagă a numărului $-\frac{5}{2}$ este -3;

iv) Rezultatul calculului $\sqrt{3^2 + 4^2}$ este 6;

v) $|1 - \sqrt{2}| = -1 - \sqrt{2}$.

Rezolvare:

i) „Pătratul este paralelogram” este o propoziție adevărată;

ii) „ $2x - 1 = 5, x \in \mathbb{R}$ ” nu este o propoziție deoarece nu putem spune dacă este o propoziție adevărată sau falsă;

iii) $\left[-\frac{5}{2}\right] = [-2, 5] = -3$ este o propoziție adevărată;

iv) $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \neq 6$ este o propoziție care are valoarea de adevăr „fals”;

v) $|1 - \sqrt{2}| = -1 + \sqrt{2} \neq -1 - \sqrt{2}$ este o propoziție care are valoarea de adevăr „fals”.

2. Determinați valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

i) p: Rezultatul calculului $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$ este $\frac{\sqrt{6}}{3}$;

ii) q: Suma unghiurilor unui triunghi este 170^0 ;

iii) r: $\min\left(-2\frac{1}{2}; -\sqrt{5}\right) = -\sqrt{5}$.

Rezolvare:

i) $\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow v(p) = 1$;

ii) $v(q) = 0$;

iii) $\left. \begin{array}{l} -2\frac{1}{2} = -\frac{2 \cdot 2 + 1}{2} = -\frac{5}{2} = -2,5 \\ -\sqrt{5} \approx -2,2 \end{array} \right| \Rightarrow \min\left(-2\frac{1}{2}; -\sqrt{5}\right) = -2\frac{1}{2} \Rightarrow v(r) = 0$.

3. Să se determine mulțimea de adevăr a predicatelor:

i) $p(x) : „\frac{2x-1}{3} - \frac{1}{2} = 2 - x, x \in \mathbb{R}”$;

ii) $q(x, y) : „(x+2) \cdot (y-1) = 3, (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}”$.

Rezolvare:

i) $\frac{2x-1}{3} - \frac{1}{2} = 2 - x \mid \cdot 6 \Rightarrow 2(2x-1) - 3 = 6(2-x) \Rightarrow 4x - 5 = 12 - 6x \Rightarrow 10x = 17 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{17}{10}$. Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este $\left\{\frac{17}{10}\right\}$.

ii) $(x+2) \cdot (y-1) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} y-1=1 \\ x+2=3 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} y-1=3 \\ x+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} y=4 \\ x=-1 \notin \mathbb{N} \end{cases}$

Mulțimea de adevăr a predicatului $q(x, y)$ este $\{(1, 2)\}$.

4. Fie predicatul $p(x) : „2x^2 - x - 1 = 0, x \in \mathbb{R}”$.

i) Să se formuleze propoziția universală $(\forall x)p(x)$ și propoziția existențială $(\exists x)p(x)$;

ii) Stabiliți valoarea de adevăr ale propozițiilor de la punctul i).

Rezolvare:

i) $(\forall x)p(x)$: „Oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, $2x^2 - x - 1 = 0$ ”

$(\exists x)p(x)$: „Există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $2x^2 - x - 1 = 0$ ”

ii) Luăm $x = 3 \Rightarrow 2 \cdot 3^2 - 3 - 1 = 14 \neq 0 \Rightarrow$ valoarea de adevăr a propoziției universale $(\forall x)p(x)$ este falsă;

$$2x^2 - x - 1 = 0 \quad \begin{matrix} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{matrix} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{propoziția existențială } (\exists x)p(x) \text{ este adevărată.}$$

iii) Exerciții propuse

1. Care dintre următoarele enunțuri sunt propoziții:

i) „ $2+3=5$ ”;

ii) „ $\frac{14}{2} + 2 \cdot 7 = 21$ ”;

iii) „Mulțimea numerelor naturale este finită”;

iv) „Triunghiul echilateral este triunghiul cu toate laturile congruente”;

v) „ $2x+1 \leq 3, x \in \mathbb{R}$ ”;

vi) „Rezolvați exercițiul: $(2^2)^3 : 2^4 \cdot (2^0 + 2^1)$ ”;

vii) „ x divide $y, x, y \in \mathbb{Z}, x \neq 0$ ”.

2. Să se stabilească valoarea de adevăr a propozițiilor:

i) „ $10 - 7 > 4$ ”;

ii) „ $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = 1$ ”;

iii) „ $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ ”;

iv) „ $|2^2 + 4| < 0$ ”;

v) „Suma unghiurilor unui triunghi este egală cu 180° ”;

vi) „3 divide 9”;

vii) „ $2 \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ ”;

viii) „ $\max(-\sqrt{2}; -1, 42) = -\sqrt{2}$ ”;

ix) „ $\sqrt{7 - \sqrt{15}} > \sqrt{3}$ ”;

x) „ $(1 + \sqrt{2})^2 + (1 - \sqrt{2})^2 \in \mathbb{N}$ ”.

3. Fie propozițiile:

p: Orice cub este o prismă.

q: Orice prismă este cub.

r: Există prisme care nu sunt cuburi.

Să se stabilească valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

i) p, q, r ;

ii) $\neg p, \neg q, \neg r$;

iii) $p \vee q, p \vee r, q \vee r$;

iv) $p \wedge q, p \wedge r, q \wedge r$;

v) $(p \vee q) \vee r, (p \vee r) \vee q, (q \vee r) \vee p$;

vi) $(p \wedge q) \vee r, (p \wedge r) \vee q, (q \wedge r) \vee p$;

vii) $(p \wedge q) \wedge r, (p \wedge r) \wedge q, (q \wedge r) \wedge p$;

viii) $p \rightarrow q, p \rightarrow r, q \rightarrow r, r \rightarrow q$;

ix) $p \leftrightarrow q, p \leftrightarrow r, q \leftrightarrow r$;

x) $\bar{p} \leftrightarrow q, \bar{r} \leftrightarrow q$.

4. Completați tabelul:

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$p \vee (p \wedge q)$	$\overline{p \wedge q}$
1	1							
1	0							
0	1							
0	0							

5. Dacă p, q, r sunt propoziții, atunci să se demonstreze următoarele teoreme logice folosind tablele de adevăr:

i) $p \rightarrow (p \vee q)$;

ii) $(p \wedge q) \rightarrow p$;

iii) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$;

iv) $p \wedge (\bar{p} \vee q) \rightarrow q$;

v) $(p \vee q) \leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$;

vi) $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$;

vii) $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$;

viii) $[(p \vee q) \vee r] \leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$;

ix) $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$;

x) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow r)$.

6. Fie $A = \{-3; -2; -1; 1; 2; 3\}$ și predicatele:

$p_1(x): "2x + 1 = x, x \in A"$; $p_2(x): "|x| = x, x \in A"$; $p_3(x): "|x| = -x, x \in A"$.

Să se determine valorile lui x pentru care:

i) $p_1(x)$ este adevărat;

ii) $p_2(x)$ este adevărat;

iii) $p_3(x)$ este adevărat;

iv) $(p_1(x) \vee p_2(x))$ este adevărat;

v) $(p_1(x) \wedge p_3(x))$ este adevărat.

7. Fie predicatul $p(x): "x^2 - 3x > 1, x \in \mathbb{R}"$. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

i) $p(-1)$;

ii) $p(\sqrt{2})$;

iii) $p(0)$;

iv) $p\left(\frac{1}{2}\right)$;

v) $p(3)$.

8. Fie predicatul $p(x): \frac{2x+7}{x+1} \in \mathbb{N}, x \in \{0; 2; 4; 5\}$. Să se precizeze valoarea de adevăr a

propoziției:

i) $p(0)$;

ii) $p(2)$;

iii) $p(4)$;

iv) există $x_1 \in \mathbb{Z}$ astfel încât $p(x_1) \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

9. Să se stabilească valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

i) „ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 5 > 1$ ”;

ii) „ $\exists x \in \mathbb{N}, 2x + 3 = 11$ ”;

iii) „ $\forall x \in \mathbb{R}, x - 3 > 4$ ”;

iv) „ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$ ”;

v) „ $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 - 5x + 6 = 0$ ”;

vi) „ $\exists x \in \mathbb{Z}, 5x + 3 \neq -4$ ”.

10. Fie propozițiile:

p: “Orice număr natural are cifra unităților 4, este divizibil cu 4”,

q: “Orice număr prim este par”,

r: “Orice triunghi cu toate laturile congruente este echilateral”,

s: “Orice triunghi cu două unghiuri congruente este isoscel”.

Să se formuleze propozițiile $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{s}$ și să se precizeze valorile lor de adevăr.