

Funcția exponențială

i) Considerații teoretice

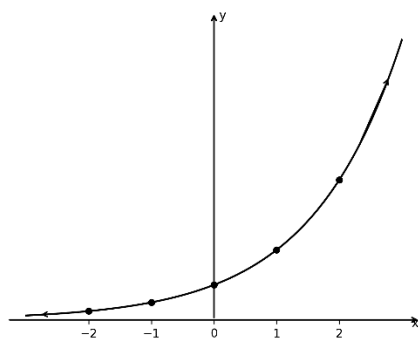
Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ se numește **funcție exponențială de bază a**.

Dacă $a > 1$ atunci funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$;

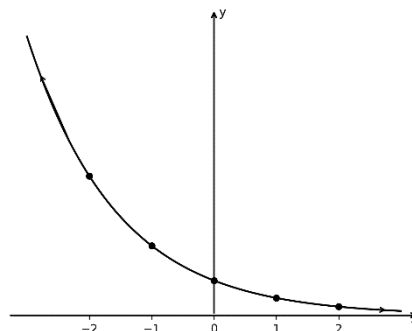
$$a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$$

Dacă $a \in (0, 1)$ atunci funcția f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$;

$$a^x > a^y \Leftrightarrow x < y;$$



$f(x) = a^x$, $a > 1$



$f(x) = a^x$, $0 < a < 1$

Reprezentarea geometrică a graficului funcției exponențiale se numește **curbă exponențială**.

Din injectivitatea funcției exponențiale, deducem: $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$

ii) Exerciții rezolvate

1. Să se compare perechile de numere:

i) $\left(\frac{3}{7}\right)^{11}$ și $\left(\frac{3}{7}\right)^{13}$;

ii) $(1,2)^3$ și $(1,2)^{\sqrt{10}}$.

Rezolvare:

i) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^x$. Cum $\frac{3}{7} \in (0, 1) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$. Din

$$\left. \begin{array}{l} 11 < 13 \\ f \text{ s.d.} \end{array} \right| \Rightarrow f(11) > f(13) \Rightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^{11} > \left(\frac{3}{7}\right)^{13}$$

ii) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = (1,2)^x$. Cum $1,2 > 1 \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Din

$$\left. \begin{array}{l} 3 < \sqrt{10} \\ f \text{ s.c.} \end{array} \right| \Rightarrow f(3) < f(\sqrt{10}) \Rightarrow (1,2)^3 < (1,2)^{\sqrt{10}}$$

2. Să se reprezinte grafic funcția exponențială $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = 2^x$.

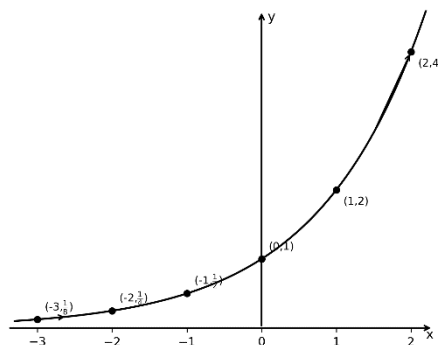
Rezolvare:

Întocmim tabelul de valori:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

Observăm, din tabelul de valori, că funcția trece crescător de la o valoare la alta.

Din grafic se observă că funcția este strict crescătoare iar curba exponențială trece prin punctul (0,1).



3. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty)$, cu $f(x) = 2^{x+1}$ și $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$.

i) Să se arate că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ și g este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$;

ii) Dovediți că f și g sunt inversabile și să se determine f^{-1} și g^{-1} .

Rezolvare:

$$(i) \forall x_1 < x_2 \in \mathbb{R}, x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow 2^{x_1+1} < 2^{x_2+1} \text{ și } x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1-1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2-1}.$$

(ii) f și g sunt inversabile $\Leftrightarrow f$ și g sunt bijective: dacă $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x_1) = f(x_2)$ și $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (injectivitatea); pentru $\forall y \in (0; +\infty)$, ecuațiile $2^{x+1} = y$ și $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = y$ au soluții

$$\text{reale: } 2^{x+1} = y \Leftrightarrow \log_2 2^{x+1} = \log_2 y \Leftrightarrow x+1 = \log_2 y \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{y}{2} \text{ și } \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = y \Leftrightarrow 2^{-x+1} = y, \text{ etc.}$$

(surjectivitatea); atunci f, g sunt bijective $\Leftrightarrow f, g$ inversabile; $f^{-1}, g^{-1}: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_2 \left(\frac{x}{2}\right)$ și

$$g^{-1}(x) = \log_2 \left(\frac{2}{x}\right).$$

4. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ care verifică inegalitățile:

$$i) 3^{5x-4} > 3^{2-3x};$$

$$ii) \left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{2x-5} \leq \left(\frac{1}{16}\right)^{x+3}.$$

Rezolvare:

Se folosește monotonia funcției exponențiale.

$$i) \left. \begin{array}{l} 3^{5x-4} > 3^{2-3x} \\ 3 > 1 \end{array} \right| \Rightarrow 5x-4 > 2-3x \Rightarrow 8x > 6 \Rightarrow x > \frac{3}{4} \Rightarrow x \in \left(\frac{3}{4}, +\infty\right);$$

ii) Aducem ambii termeni la aceeași bază.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^{2x-5} \leq \left[\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^{x+3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2-x+6x-15} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{4x+12}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{5x-13} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{4x+12} \Rightarrow 5x-13 \geq 4x+12 \Rightarrow x \geq 25 \Rightarrow x \in [25, +\infty).$$

$$\frac{1}{2} \in (0,1)$$

iii) Exerciții propuse

1. Să se compare perechile de numere:

i) $a = \left(\frac{2}{3}\right)^{15}$ și $b = \left(\frac{2}{3}\right)^{14}$;

ii) $a = (1,5)^5$ și $b = (1,5)^{\sqrt{26}}$;

iii) $a = \left(\frac{3}{5}\right)^7$ și $b = \left(\frac{3}{5}\right)^{2\sqrt{10}}$;

v) $a = 2^{\sqrt{7}}$ și $b = 2^{\frac{8}{3}}$;

vi) $a = \left(\frac{4}{16}\right)^{\sqrt{10}}$ și $b = 2^{2\sqrt{9}}$;

vii) $a = \left(\frac{5}{7}\right)^{2\sqrt{\frac{49}{4}}}$ și $b = \left(\frac{5}{7}\right)^{\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}}$;

viii) $a = (\sqrt{2})^{3\sqrt{5}}$ și $b = 2^{\frac{7}{2}}$.

2. Să se reprezinte grafic următoarele funcții exponențiale $f : \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty)$:

i) $f(x) = 3^x$;

ii) $f(x) = 3^x + 1$;

iii) $f(x) = 3^x - 2$.

3. Să se reprezinte grafic următoarele funcții exponențiale $f : \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty)$:

i) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$;

ii) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x + 2$;

iii) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x - 1$.

4. Să se reprezinte grafic următoarele funcții exponențiale $f : \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty)$:

i) $f(x) = 2^{x-3}$;

ii) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 1$.

5. Studiați monotonia funcțiilor exponențiale $f : \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty)$:

i) $f(x) = 2^x + 1$;

ii) $f(x) = 5 - 3^x$;

iii) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$;

iv) $f(x) = 2^x + 3^x$;

v) $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$.

6. Studiați bijectivitatea următoarelor funcții exponențiale:

i) $f : \mathbb{R} \rightarrow (3; +\infty), f(x) = 3^x + 5$;

ii) $f: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty; 1), f(x) = 1 - 5^x$;

iii) $f: \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty), f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0 \\ x+3, & x > 0 \end{cases}$.

7. Comparați următoarele numere:

i) $a = 3^5$ și $b = 3^7$;

ii) $a = \left(\frac{1}{2}\right)^4$ și $b = \left(\frac{1}{2}\right)^3$;

iii) $a = e^{21}$ și $b = e^{\frac{51}{2}}$;

iv) $a = \left(\frac{2}{3}\right)^9$ și $b = \left(\frac{3}{2}\right)^{-10}$;

v) $a = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ și $b = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$;

vi) $a = (0,3)^{\frac{6}{5}}$ și $b = (0,3)^{\frac{12}{11}}$;

vii) $a = (\sqrt{27})^{0,3}$ și $b = (3\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$;

viii) $a = 3^{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ și $b = 3^{\sqrt{3}-1}$;

ix) $a = \left(\cos \frac{\pi}{6}\right)^{2-\sqrt{3}}$ și $a = \left(\cos \frac{\pi}{6}\right)^{\sqrt{2}-1}$.

8. Determinați numărul real x care verifică inegalitățile:

i) $4^x \geq 64$;

ii) $3^{x+1} \leq 27$;

iii) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-1} > 125$;

iv) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \geq 8^{1-5x}$;

v) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{x+2} \cdot \sqrt{3} > 1$;

vi) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-5} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \leq \left(\sqrt[3]{\frac{6}{9}}\right)^{1-x}$.