

Funcții inversabile. Inversa unei funcții.

i) Considerații teoretice

Funcția $f : A \rightarrow B$ se numește **funcție inversabilă** dacă $\exists g : B \rightarrow A$, astfel încât $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$. Notăm $g = f^{-1}$.

O funcție $f : A \rightarrow B$ este o funcție inversabilă dacă și numai dacă este o funcție bijectivă.

$f^{-1} : B \rightarrow A, f^{-1}(y) = x$, unde $y = f(x)$.

Graficele funcțiilor f și f^{-1} sunt simetrice față de prima bisectoare a axelor de coordonate (față de dreapta de ecuație $y=x$).

ii) Exerciții rezolvate

1. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 2 \\ 3x-2, & x \geq 2 \end{cases}$ este inversabilă și să se determine inversa sa.

Rezolvare:

f este bijectivă dacă restricțiile f_1, f_2 sunt injective, iar $\text{Im } f_1 \cap \text{Im } f_2 = \emptyset$ și $\text{Im } f_1 \cup \text{Im } f_2 = \mathbb{R}$

$f_1 : (-\infty; 2) \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = x+2$ este strict monotonă, deci f_1 este injectivă;

$f_2 : [2; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = 3x-2$ este strict monotonă, deci f_2 este injectivă;

$\text{Im } f_1 = (-\infty; 4), \text{Im } f_2 = [4; +\infty)$

Cum $\text{Im } f_1 \cap \text{Im } f_2 = \emptyset$ și $\text{Im } f_1 \cup \text{Im } f_2 = \mathbb{R} \Rightarrow f$ este surjectivă.

Am demonstrat că funcția f este bijectivă, deci este inversabilă.

Pentru determinarea inverse funcției f , vom rezolva ecuațiile $f_1(x) = y$ și $f_2(x) = y$.

$f_1(x) = y \Rightarrow x+2 = y \Rightarrow x = y-2$, cum $x \in (-\infty; 2) \Rightarrow y \in (-\infty; 4)$;

$f_2(x) = y \Rightarrow 3x-2 = y \Rightarrow x = \frac{y+2}{3}$, cum $x \in [2; +\infty) \Rightarrow y \in [4; +\infty)$.

În concluzie, $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \begin{cases} x-2, & x < 4 \\ \frac{x+2}{3}, & x \geq 4 \end{cases}$.

2. Să se studieze inversabilitatea funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x-7$ și să se determine inversa funcției f , dacă există.

Rezolvare:

f – injectivă : $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 - 7 = 2x_2 - 7 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ este injectivă (1)

f – surjectivă : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) = y$

$2x-7 = y \Rightarrow 2x = y+7 \Rightarrow x = \frac{y+7}{2} \in \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{y+7}{2} - 7 \Rightarrow f(x) = y \Rightarrow f$ este surjectivă (2)

Din (1) și (2) f este bijectivă, deci f este inversabilă $\Rightarrow \exists f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x = f^{-1}(y)$

$x = \frac{y+7}{2} \Bigg| \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+7}{2}$
 $x = f^{-1}(y)$

Concluzie: $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \frac{x+7}{2}$.

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{4\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(x) = \frac{x+1}{4-x}$. Știind că funcția f este bijectivă, să se determine inversa sa.

Rezolvare:

$$\text{i) Din } \frac{x+1}{4-x} = y \Rightarrow x+1 = 4y - xy \Rightarrow x + xy = 4y - 1 \Rightarrow x(1+y) = 4y - 1 \Rightarrow x = \frac{4y-1}{y+1}$$

f este bijectivă, deci f este inversabilă $\Rightarrow \exists f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x = f^{-1}(y)$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{4y-1}{y+1} \\ x = f^{-1}(y) \end{array} \right| \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{4y-1}{y+1}, y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

iii) Exerciții propuse

1. Să se arate că următoarele funcții sunt bijective și să se determine inversa fiecăreia:

i) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x - 3$;

ii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2 + 5x$;

iii) $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $f(x) = 4x - 3$;

iv) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{-x+1}{3}$;

v) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3-2x}{5}$;

vi) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x-3, & x \leq 4 \\ -3x+8, & x > 4 \end{cases}$;

vii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x-2, & x \leq 3 \\ 2x-1, & x > 3 \end{cases}$;

viii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 2x, & x < 0 \end{cases}$.

Indicații:

i) $f^{-1}(x) = x + 3$;

ii) $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{5}$;

iii) $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{4}$;

iv) $f^{-1}(x) = \frac{3-5x}{2}$;

v) $f^{-1}(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 1 \\ \frac{8-x}{3}, & x > 1 \end{cases}$;

vi) $f^{-1}(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 1 \\ \frac{x+1}{2}, & x > 1 \end{cases}$;

vii) $f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ \frac{x}{2}, & x < 0 \end{cases}$.

2. Fie funcția $f: D \rightarrow E$, $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$.

i) Să se determine domeniul de definiție D al funcției f ;

ii) Să se studieze bijectivitatea funcției f , determinând în același timp și codomeniul E ;

iii) Determinați inversa funcției f dacă este cazul;

iv) Să se verifice că $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = 1_{\mathbb{R} \setminus \{1\}}$.

Indicații:

i) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;

ii) f – injectivă: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$\left. \begin{array}{l} f(x_1) = \frac{x_1 + 2}{x_1 - 1} \\ f(x_2) = \frac{x_2 + 2}{x_2 - 1} \\ f(x_1) = f(x_2) \end{array} \right| \Rightarrow \frac{x_1 + 2}{x_1 - 1} = \frac{x_2 + 2}{x_2 - 1} \Rightarrow x_1 x_2 - x_1 + 2x_2 - 2 = x_1 x_2 - x_2 + 2x_1 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f \text{ este injectivă.}$$

f – surjectivă: $\forall y \in E, \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ astfel încât $f(x) = y$.

$$\frac{x+2}{x-1} = y \Rightarrow x+2 = xy - y \Rightarrow x(1-y) = -y-2 \Rightarrow x = \frac{-y-2}{1-y} \quad (y \neq 1) \Rightarrow E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f(x) = \frac{\frac{-y-2}{1-y} + 2}{\frac{-y-2}{1-y} - 1} = y \Rightarrow f \text{ este surjectivă} \Rightarrow f \text{ este bijectivă;}$$

$$\text{iii) } f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}, f^{-1}(x) = \frac{-x-2}{1-x};$$

$$\text{iv) } f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = 1_{\mathbb{R} \setminus \{1\}} \Leftrightarrow \begin{cases} (f \circ f^{-1})(x) = x \\ (f^{-1} \circ f)(x) = x \end{cases}.$$