

Funcții pare. Funcții impare

i) Considerații teoretice

Dacă $f : A \rightarrow B$ este o funcție reală de variabilă reală și mulțimea A este un interval de forma $(-a; a)$ sau $[-a; a]$ ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ și a fixat), atunci se spune că:

- funcția f este **pară** dacă $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in A$;
- funcția f este **impară** dacă $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in A$.
- dacă f este funcție pară, atunci axa OY este axă de simetrie a graficului funcției f , adică dacă $P(x_0, y_0) \in G_f$, atunci și simetricul punctului P față de OY (adică punctul $P'(-x_0, y_0)$) aparține graficului funcției f ;
- dacă f este funcție impară, atunci originea axelor O este centru de simetrie al graficului funcției f , adică dacă $P(x_0, y_0) \in G_f$, atunci și punctul $P'(-x_0, -y_0)$ aparține graficului funcției f (P și P' sunt simetrice față de punctul O);

i) Exerciții rezolvate

1. Stabiliți care dintre următoarele funcții sunt pare sau impare:

i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3 + x$;

ii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^4 + 5$;

iii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x^3 + 1$.

Rezolvare:

(i) f este impară dacă $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(-x) &= -(-x)^3 + (-x) = x^3 - x = -(-x^3 + x) \\ f(x) &= -x^3 + x \end{aligned} \Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow f \text{ este funcție impară;}$$

(ii) f este pară dacă $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2(-x)^4 + 5 = 2x^4 + 5 \\ f(x) &= 2x^4 + 5 \end{aligned} \Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow f \text{ este funcție pară;}$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= -3(-x)^3 + 1 = 3x^3 + 1 \\ f(x) &= -3x^3 + 1 \end{aligned} \Rightarrow f \text{ nu este nici pară, nici impară.}$$

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x-1| - |x+1|$. Arătați că punctul $O(0,0)$ este centru de simetrie al graficului funcției f .

Rezolvare:

Dacă f este funcție impară, atunci originea axelor O este centru de simetrie al graficului funcției f .

$$f(-x) = |-x-1| - |-x+1| = |x+1| - |x-1| = -(|x-1| - |x+1|) = -f(x) \Rightarrow f \text{ este funcție impară}$$

Prin urmare, punctul $O(0,0)$ este centru de simetrie al graficului funcției f .

3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{-|2x|}{x^2 + 1}$. Arătați că funcția f are ca axă de simetrie axa ordonatelor OY .

Rezolvare:

Dacă f este funcție pară, atunci axa OY este axă de simetrie a graficului funcției f .

$$f(-x) = \frac{-|-2x|}{(-x)^2 + 1} = \frac{-|2x|}{x^2 + 1} = f(x) \Rightarrow f \text{ este funcție pară. Prin urmare, } OY \text{ este axă de simetrie a graficului}$$

funcției f .

iii) Exerciții propuse

1. Să se arate că următoarele funcții sunt pare:

- i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$; ii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$; iii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 + 3$;
iv) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$; v) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$; vi) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x^2 - 5$.

2. Arătați că următoarele funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții impare:

- i) $f(x) = x$; ii) $f(x) = x^3$; iii) $f(x) = 2x^3 + 3x$;
iv) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$; v) $f(x) = \frac{-2x^3}{3x^2 + 4}$.

3. Fie funcția $f: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [-1; 0] \\ -x+1, & x \in (0; 1] \end{cases}$. Să se arate că:

- i) f este strict crescătoare pe $[-1; 0)$ și strict descrescătoare pe $(0; 1]$;
ii) f este funcție pară.

4. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1$ și $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$. Să se arate că:

- i) f și g sunt funcții pare;
ii) $f + g$ este funcție pară;
iii) $f - g$ este funcție pară;
iv) $f \cdot g$ este funcție pară.

5. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{3x^2 + 1}$ și $g(x) = 2x^3 + x$. Arătați că:

- i) f și g sunt funcții impare;
ii) $f + g$ este funcție impară;
iii) $f - g$ este funcție impară;
iv) $f \cdot g$ este funcție pară.

6. Să se stabilească dacă funcțiile $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții pare, impare sau nici pare nici impare, precizând în prealabil domeniul maxim de definiție:

- i) $f(x) = x^2 + 3$; ii) $f(x) = x^3 + x$; iii) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$;
iv) $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 9}$; v) $f(x) = \frac{x^3 + x}{3 + |x|}$; vi) $f(x) = -2x^3 + 5$;
vii) $f(x) = \max(x; x^3)$; viii) $f(x) = \frac{x+7}{x^2 - x + 2}$; ix) $f(x) = |x-2| - |2+x|$;
x) $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 1, & x \in [-1; 0] \\ -2x^3 + 1, & x \in (0; 1] \end{cases}$.

Indicații.

- i) $D = \mathbb{R}, f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = f(x) \Rightarrow f$ este pară;
ii) $D = \mathbb{R}, f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x) \Rightarrow f$ este impară;
iii) $1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow (1-x)(1+x) \geq 0 \Rightarrow x \in [-1; 1] \Rightarrow D = [-1; 1]$
 $f(-x) = \sqrt{1 - (-x)^2} = \sqrt{1 - x^2} = f(x) \Rightarrow f$ este pară;
vii) $\max(a; b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}; \min(a; b) = \frac{a+b-|a-b|}{2};$

7. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x-2| - |x+2|$. Arătați că punctul $O(0,0)$ este centru de simetrie al graficului funcției f .

Indicații.

Dacă f este funcție impară, atunci originea axelor O este centru de simetrie al graficului funcției f .

8. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{-|3x|}{x^2+1}$. Arătați că funcția f are ca axă de simetrie axa ordonatelor OY .

Indicații.

Dacă f este funcție pară, atunci axa OY este axă de simetrie a graficului funcției f .

9. Fie funcțiile $f: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$ și $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$.

i) Să se arate că graficul funcției f este simetric față de originea reperului cartezian;

ii) Să se arate că graficul funcției g este simetric față de axa OY .

Indicații.

i) f -funcție impară; ii) f -funcție pară.