

Funcții surjective.

i) Considerații teoretice

Fie $f : D \rightarrow E$

f – surjectivă dacă: $\boxed{\forall y \in E, \exists x \in D \text{ a.î. } f(x) = y}$

Pentru a arăta că o funcție f este surjectivă, putem folosi una dintre următoarele metode:

1) f – surjectivă, dacă $f(D) = E$;

2) metoda grafică: O funcție numerică este injectivă dacă orice paralelă dusă la axa Ox prin punctele codomeniului intersectează graficul funcției în **cel puțin** un punct.

ii) Exerciții rezolvate

1. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ este surjectivă.

Rezolvare:

Metoda 1

f – surjectivă dacă: $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} \text{ a.î. } f(x) = y$

Pentru $\forall y \in \mathbb{R}$, luăm $2x - 1 = y \Rightarrow 2x = y + 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{2}$ (1)

Cum $y \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{y+1}{2} = x \in \mathbb{R}$ (2)

$f(x) = 2 \cdot \frac{y+1}{2} - 1 = y + 1 - 1 = y$ (3)

Din relațiile (1), (2) și (3) rezultă că f este surjectivă.

Metoda 2 (Metoda grafică)

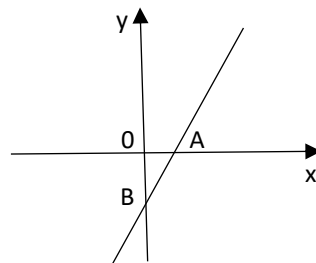
Reprezentăm grafic funcția de gradul I într-un reper cartezian xOy, determinând punctele de intersecție cu axele de coordonate.

$Gf \cap Ox : y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$

$Gf \cap Oy : x = 0 \Rightarrow y = 2 \cdot 0 - 1 = -1 \Rightarrow B(0; -1)$

Observăm că orice paralelă dusă la axa Ox prin punctele axei Oy, intersectează graficul funcției f într-un punct.

Concluzie: f este surjectivă.



2. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 2 \\ 2x-1, & x > 2 \end{cases}$ este surjectivă.

Rezolvare:

Metoda 1

Caz 1: $\boxed{x \in (-\infty; 2]}$

$f_1 : (-\infty; 2] \rightarrow D, f_1(x) = x + 1$ este restricția funcției f pe intervalul $(-\infty; 2]$

f_1 – surjectivă dacă $\forall y \in D, \exists x \in (-\infty; 2] \text{ a.î. } f_1(x) = y$

Din $x + 1 = y \Rightarrow x = y - 1$

Cum $x \in (-\infty; 2] \Rightarrow y - 1 \leq 2 \Rightarrow y \leq 3 \Rightarrow y \in (-\infty; 3] = D$

$f_1(x) = y + 1 - 1 = y \Rightarrow f_1$ este surjectivă.

Caz 2: $\boxed{x \in (2; +\infty)}$

$f_2 : (2; +\infty) \rightarrow E, f_2(x) = 2x - 1$ este restricția funcției f pe intervalul $(2; +\infty)$

f_2 – surjectivă dacă $\forall y \in E, \exists x \in (2; +\infty) \text{ a.î. } f_2(x) = y$

$$\text{Din } 2x - 1 = y \Rightarrow 2x = y + 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{2}$$

$$\text{Cum } x \in (2; +\infty) \Rightarrow \frac{y+1}{2} \in (2; +\infty) \Rightarrow (y+1) \in (4; +\infty) \Rightarrow y \in (3; +\infty) = E$$

$$f_2(x) = 2 \cdot \frac{y+1}{2} - 1 = y + 1 - 1 = y \Rightarrow f_2 \text{ este surjectivă.}$$

Prin urmare $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) = y \Rightarrow f$ este surjectivă.

Metoda 2 (Metoda grafică)

Se întocmește tabelul de valori și se reprezintă graficul funcției f . Observăm că orice paralelă dusă la axa Ox prin punctele axei Oy , intersectează graficul funcției f într-un punct.

Concluzie: f este surjectivă

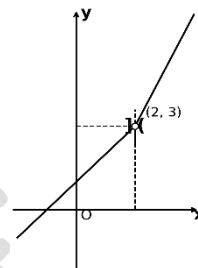


fig. 1

3. Să se studieze surjectivitatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x + 2$.

Rezolvare:

Metoda 1 (Metoda grafică)

Din grafic observăm că imaginea funcției f este

$$\text{Im } f = \left[-\frac{1}{4}; +\infty \right)$$

Pentru valori ale lui y mai mici decât $-\frac{1}{4}$ paralelele duse la axa Ox , prin punctele axei Oy nu intersectează graficul funcției în niciun punct, prin urmare f nu este o funcție surjectivă.

Metoda 2.

f – surjectivă dacă $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) = y$

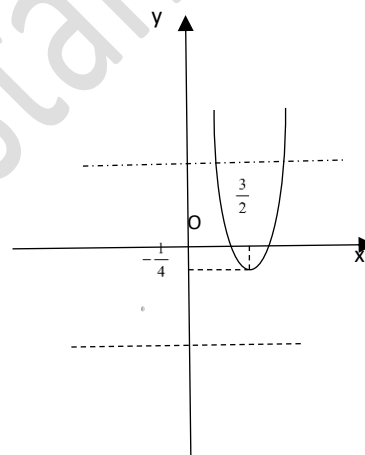
$$\text{Luăm } x^2 - 3x + 2 = y \Rightarrow x^2 - 3x + (2 - y) = 0,$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 2 - y \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(2 - y) = 1 + 4y$$

Pentru ca ecuația data să aibă soluții, trebuie ca discriminantul ecuației să nu fie negativ.

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 + 4y \geq 0 \Leftrightarrow 4y \geq -1 \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{4}$$

Cum funcția poate lua valori doar în intervalul $\left[-\frac{1}{4}; +\infty \right)$ atunci f nu este o funcție surjectivă.



4. Să se studieze surjectivitatea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty), f(x) = x^2$.

Rezolvare:

Metoda 1

f – surjectivă: $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in [0; +\infty)$ a.î. $f(x) = y$

$$\text{Luăm } \left. \begin{array}{l} x^2 = y \Rightarrow x = \pm\sqrt{y} \\ y \in [0; +\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow x = \sqrt{y}$$

$$f(x) = (\sqrt{y})^2 = y \Rightarrow f \text{ este surjectivă.}$$

Metoda 2 (Metoda grafică)

Din grafic se observă că oricum am lua paralele la axa Ox prin punctele axei Oy , acestea vor intersecta graficul în cel puțin un punct, prin urmare funcția data este surjectivă.

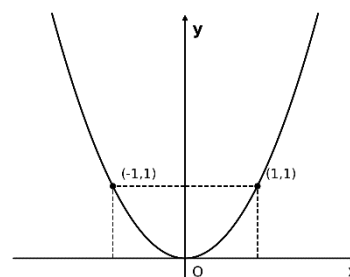


fig. 1

iii) Exerciții propuse

1. Să se studieze, folosind două metode, surjectivitatea funcțiilor:

i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 4$;

ii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 - x$;

iii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 7$;

iv) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4 - 3x$;

v) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+1}{3}$;

vi) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2-x}{3}$.

2. Să se studieze surjectivitatea funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 2 \\ 3x+2, & x > 2 \end{cases}$.

3. Să se arate că funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{1}{x}$ este surjectivă.

4. Fie funcția $f : D \rightarrow E, f(x) = \frac{2x+3}{3-x}$.

i) Determinați domeniul de definiție al funcției;

ii) Determinați codomeniul funcției;

iii) Arătați că funcția este surjectivă.

5. Arătați că următoarele funcții nu sunt surjective:

i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq -2 \\ 3, & x > -2 \end{cases}$;

ii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1 \\ -x, & x > -1 \end{cases}$.