

Funcțiile trigonometrice sin, cos, tg și ctg

i) Considerații teoretice

Fie cercul trigonometric C, t un număr real și M unicul punct pe cerc corespunzător numărului t prin funcția de acoperire universală (adică M este extremitatea arcului

orientat $\widehat{AM}$ cu proprietatea $\mu(\widehat{AM}) = t$).

Atunci

$$\sin t = \text{pr}_{oy} OM = y_M$$

$$\cos t = \text{pr}_{ox} OM = x_M \quad (1), \text{ (fig. 1).}$$

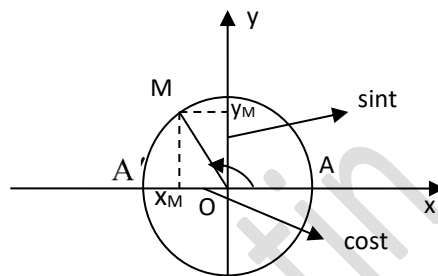


Fig. 1

S-au definit astfel funcțiile:

$$\sin : [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1], \cos : [0, 2\pi] \rightarrow [-1, 1]$$

Proprietăți ale funcțiilor sin și cos:

i) Funcțiile sin și cos sunt mărginite $\begin{cases} -1 \leq \sin t \leq 1 \\ -1 \leq \cos t \leq 1 \end{cases}, \forall t \in \mathbb{R};$

ii) $\sin^2 t + \cos^2 t = 1, \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 t = 1 - \cos^2 t \\ \cos^2 t = 1 - \sin^2 t \end{cases};$

iii) Funcția sinus este o funcție impară iar funcția cosinus este o funcție pară.

$$\sin(-t) = -\sin t, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\cos(-t) = \cos t, \forall t \in \mathbb{R}$$

iv) Funcțiile sinus și cosinus sunt funcții periodice cu perioada principală $T_0 = 2\pi$

$$\begin{cases} \sin(t + 2k\pi) = \sin t \\ \cos(t + 2k\pi) = \cos t \end{cases}, \forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

v) Semnul funcțiilor sin și cos

funcție	C1	C2	C3	C4
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+

• Fie cercul trigonometric C și t un număr real cu proprietatea $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ și M unicul punct pe

cercul C corespunzător numărului t. Atunci $\text{tgt} = \frac{\sin t}{\cos t}$. S-a definit astfel funcția

$$\text{tgt} : \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \boxed{\text{tgt} = \frac{\sin t}{\cos t}}$$

• Fie cercul fundamental C și t un număr real cu proprietatea $t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ și N unicul punct pe cercul C

corespunzător numărului t. Atunci $\text{ctgt} = \frac{\cos t}{\sin t}$. S-a definit astfel funcția

$$\text{ctgt} : \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \boxed{\text{ctgt} = \frac{\cos t}{\sin t}}.$$

Proprietăți ale funcțiilor tg și ctg

i) Funcțiile tangentă și cotangentă sunt funcții periodice cu perioada principală $T_0 = \pi$

$$\text{tg}(t + k\pi) = \text{tgt}, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\};$$

$$\text{ctg}(t + k\pi) = \text{ctgt}, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\};$$

ii) Funcțiile tangentă și cotangentă sunt funcții impare.

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{tg}(-t) &= -\operatorname{tg} t, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \\ \operatorname{ctg}(-t) &= -\operatorname{ctg} t, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}}$$

iii) Semnul funcțiilor tg și ctg

funcție	cadran	C1	C2	C3	C4
tg		+	-	+	-
ctg		+	-	+	-

iv) Funcțiile tg și ctg sunt nemărginite

v) $\boxed{\operatorname{tg} t = \frac{1}{\operatorname{ctg} t}, \operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t}}.$

ii) Exerciții rezolvate

1. Determinați mulțimea valorilor funcțiilor:

i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 \sin x + 3;$

ii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 - 3 \cos x.$

Rezolvare.

i) $\sin x \in [-1, 1] \Rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1 \cdot 2 \Rightarrow -2 \leq 2 \sin x \leq 2 \cdot 3 \Rightarrow 1 \leq 2 \sin x + 3 \leq 5 \Rightarrow f(x) \in [1, 5], \forall x \in \mathbb{R};$

ii) $\cos x \in [-1, 1] \Rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1 \cdot (-3) \Rightarrow -3 \leq -3 \cos x \leq 3 \cdot 1 \Rightarrow -2 \leq 1 - 3 \cos x \leq 4 \Rightarrow$
 $\Rightarrow f(x) \in [-2, 4], \forall x \in \mathbb{R}.$

2. Să se determine semnul numerelor:

i) $\sin \frac{3\pi}{5};$ ii) $\cos \frac{45\pi}{11};$ iii) $\operatorname{tg} \frac{123\pi}{17};$ iv) $\operatorname{ctg} \frac{14\pi}{3};$ v) $\sin \left(-\frac{11\pi}{5}\right);$ vi) $\cos \left(-\frac{37\pi}{6}\right).$

Rezolvare.

i) $\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{5} < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{3\pi}{5} \in C_{II} \Rightarrow \sin \frac{3\pi}{5} > 0;$

ii) $\cos \frac{45\pi}{11} = \cos \left(4\pi + \frac{\pi}{11}\right) = \cos \frac{\pi}{11}, 0 < \frac{\pi}{11} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{11} \in C_I \Rightarrow \cos \frac{\pi}{11} > 0;$

iii) $\operatorname{tg} \frac{123\pi}{17} = \operatorname{tg} \left(7\pi + \frac{4\pi}{17}\right) = \operatorname{tg} \frac{4\pi}{17}, 0 < \frac{4\pi}{17} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{4\pi}{17} \in C_I \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{4\pi}{17} > 0;$

iv) $\operatorname{ctg} \frac{14\pi}{3} = \operatorname{ctg} \left(4\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} \in C_{II} \Rightarrow \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3} < 0;$

v) $\sin(-x) = -\sin x \Rightarrow \sin \left(-\frac{11\pi}{5}\right) = -\sin \frac{11\pi}{5}$

$\sin \frac{11\pi}{5} = \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{5}\right) = \sin \frac{\pi}{5} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{5} > 0 \Rightarrow -\sin \frac{11\pi}{5} < 0$

$0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{5} \in C_I$

vi) $\cos(-x) = \cos x \Rightarrow \cos \left(-\frac{37\pi}{6}\right) = \cos \frac{37\pi}{6}$

$\cos \frac{37\pi}{6} = \cos \left(6\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{6} > 0 \Rightarrow \cos \frac{37\pi}{6} > 0.$

$0 < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \in C_I$

3. Verificați dacă $T = 6\pi$ este perioadă a funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

i) $f(x) = \sin x + \cos 2x$;

ii) $f(x) = \sin \frac{x}{3} \cdot \cos x$.

Rezolvare.

i) $f(x+T) = f(x+6\pi) = \sin(x+6\pi) + \cos 2(x+6\pi) = \sin(x+6\pi) + \cos(2x+12\pi) = \sin x + \cos 2x = f(x)$
 $\Rightarrow f(x+6\pi) = f(x) \Rightarrow T = 6\pi$ este perioadă pentru funcția f ;

ii) $f(x+T) = f(x+6\pi) = \sin \frac{x+6\pi}{3} \cdot \cos(x+6\pi) = \sin \frac{x+6\pi}{3} \cdot \cos(x+6\pi) =$
 $= \sin\left(\frac{x}{3} + 2\pi\right) \cdot \cos(x+6\pi) = \sin \frac{x}{3} \cos x = f(x) \Rightarrow f(x+6\pi) = f(x) \Rightarrow T = 6\pi$ este perioadă pentru funcția f .

4. Comparați numerele:

i) $\sin \frac{\pi}{3} \square \sin \frac{\pi}{5}$;

ii) $\cos \frac{\pi}{5} \square \cos \frac{\pi}{7}$;

iii) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{7} \square \operatorname{tg} \frac{\pi}{9}$;

iv) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{9} \square \operatorname{ctg} \frac{\pi}{11}$.

Rezolvare.

i) Funcția sinus este crescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ și strict descrescătoare pe intervalul $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$; Cum

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{5} \\ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{array} \right\} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{3} > \sin \frac{\pi}{5};$$

ii) Funcția cosinus este crescătoare pe $[\pi, 2\pi]$ și strict descrescătoare pe intervalul $[0, \pi]$; Cum

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\pi}{5} > \frac{\pi}{7} \\ \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{7} \in [0, \pi] \end{array} \right\} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{5} < \cos \frac{\pi}{7};$$

iii) Funcția tangentă este strict crescătoare pe $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

$$\text{Cum } \left. \begin{array}{l} \frac{\pi}{9} > \frac{\pi}{11} \\ \frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{11} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7} < \operatorname{ctg} \frac{\pi}{9};$$

iv) Funcția cotangentă este strict descrescătoare pe $(0, \pi)$.

$$\text{Cum } \frac{\pi}{7} > \frac{\pi}{9} \text{ și } \frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{9} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\pi}{7} > \operatorname{tg} \frac{\pi}{9}.$$

5. Să se arate că $\frac{1-2\sin^2 x}{2\cos^2 x-1} = 1, 2\cos^2 x-1 \neq 0$.

Rezolvare.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2(1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$\frac{1-2\sin^2 x}{2\cos^2 x-1} = \frac{2\cos^2 x-1}{2\cos^2 x-1} = 1.$$

6. Să se arate că $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) = -1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^6 x + \cos^6 x = \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x$$

$$2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) = 2(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) -$$

$$-3(\sin^4 x + \cos^4 x) = -(\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = -(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = -1.$$

iii) Exerciții propuse

1. Determinați mulțimea valorilor funcțiilor:

i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4 \sin x$;

ii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 \cos x - 5$;

iii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3 - 4 \sin x$;

iv) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |3 \sin x|$;

v) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 - |\cos x|$;

vi) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |\sin x - 1| + |\sin x + 1|$.

2. Verificați dacă $T = 4\pi$ este perioadă a funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dacă:

i) $f(x) = \cos x + \sin 4x$;

ii) $f(x) = \sin \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$;

iii) $f(x) = |\sin 2x| + 3 \cos x$.

3. Verificați dacă $T = \frac{\pi}{2}$ este perioadă a funcțiilor $f: A \rightarrow \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$, dacă:

i) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;

ii) $f(x) = \operatorname{ctg} 4x$;

iii) $f(x) = 4 \operatorname{tg} x + 5 \operatorname{ctg}(\pi - 6x)$.

4. Stabiliți semnul următoarelor numere:

i) $\sin \frac{9\pi}{5}$; ii) $\cos \frac{15\pi}{13}$; iii) $\operatorname{tg} \frac{48\pi}{9}$; iv) $\operatorname{ctg} \frac{61\pi}{18}$; v) $\sin\left(-\frac{45\pi}{2}\right)$; vi) $\cos\left(-\frac{44\pi}{5}\right)$

5. Să se studieze paritatea și imparitatea funcțiilor:

i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3 \sin x$;

ii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 - 3 \cos x$;

iii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2 + 1) \sin x$;

iv) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 \sin x \cos x$;

v) $f: \mathbb{R} - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x \operatorname{tg} x$;

vi) $f: \mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \operatorname{ctg}^5 x$.

ii) Transformați în grade măsurile α de la i)-v), considerând $\pi \approx 3,1$ și numerele iraționale $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ și $\sqrt{6}$ approximate cu o zecimală exactă.

6. Utilizând cercul trigonometric, să se compare numerele:

i) $\sin 35^\circ \square \sin 20^\circ$; $\cos 35^\circ \square \cos 20^\circ$; $\operatorname{tg} 35^\circ \square \operatorname{tg} 20^\circ$; $\operatorname{ctg} 35^\circ \square \operatorname{ctg} 20^\circ$;

ii) $\sin 100^\circ \square \sin 150^\circ$; $\cos 100^\circ \square \cos 150^\circ$; $\operatorname{tg} 100^\circ \square \operatorname{tg} 150^\circ$; $\operatorname{ctg} 100^\circ \square \operatorname{ctg} 150^\circ$;

iii) $\sin 200^\circ \square \sin 250^\circ$; $\cos 200^\circ \square \cos 250^\circ$; $\operatorname{tg} 200^\circ \square \operatorname{tg} 250^\circ$; $\operatorname{ctg} 200^\circ \square \operatorname{ctg} 250^\circ$;

7. Comparați numerele:

$$\begin{array}{llll} \text{i)} \sin \frac{\pi}{7} \square \sin \frac{\pi}{9}; & \cos \frac{\pi}{7} \square \cos \frac{\pi}{9}; & \operatorname{tg} \frac{\pi}{7} \square \operatorname{tg} \frac{\pi}{9}; & \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7} \square \operatorname{ctg} \frac{\pi}{9}; \\ \text{ii)} \sin \frac{2\pi}{3} \square \sin \frac{8\pi}{9}; & \cos \frac{2\pi}{3} \square \cos \frac{8\pi}{9}; & \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} \square \operatorname{tg} \frac{8\pi}{9}; & \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3} \square \operatorname{ctg} \frac{8\pi}{9}; \\ \text{iii)} \sin \frac{7\pi}{6} \square \sin \frac{4\pi}{3}; & \cos \frac{7\pi}{6} \square \cos \frac{4\pi}{3}; & \operatorname{tg} \frac{7\pi}{6} \square \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3}; & \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{6} \square \operatorname{ctg} \frac{4\pi}{3}; \end{array}$$

8. Utilizând cercul trigonometric, să se arate că:

$$\begin{array}{l} \text{i)} \text{ dacă } x, y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ și } x < y \Rightarrow \sin x < \sin y \text{ și } \cos x > \cos y; \\ \text{ii)} \text{ dacă } x, y \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \text{ și } x < y \Rightarrow \sin x > \sin y \text{ și } \cos x > \cos y; \\ \text{iii)} \text{ dacă } x, y \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right) \text{ și } x < y \Rightarrow \sin x > \sin y \text{ și } \cos x < \cos y; \\ \text{iv)} \text{ dacă } x, y \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right) \text{ și } x < y \Rightarrow \sin x < \sin y \text{ și } \cos x < \cos y. \end{array}$$

9. Utilizând cercul trigonometric, stabiliți semnul următoarelor expresii aritmetice:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} (\sin 48^\circ - \sin 46^\circ)(\operatorname{tg} 48^\circ - \operatorname{tg} 46^\circ); & \text{ii)} (\cos 48^\circ - \cos 46^\circ)(\operatorname{ctg} 48^\circ - \operatorname{ctg} 46^\circ); \\ \text{iii)} \sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) \cdot \left(\sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{5}\right); & \text{iv)} \cos\left(-\frac{\pi}{9}\right) \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{5} - \cos \frac{3\pi}{6}\right); \\ \text{v)} \operatorname{tg} \frac{\pi}{7} \cdot \operatorname{tg} \frac{5\pi}{8}; & \text{vi)} \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{5} \cdot \sin \frac{4\pi}{5}. \end{array}$$

10. Să se demonstreze egalitățile:

$$\begin{array}{l} \text{i)} (\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)^2 = 4 \sin x \cos x; \\ \text{ii)} \cos^2 x (\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x + \cos^2 x) = 1; \\ \text{iii)} \operatorname{ctg}^2 x \cdot \cos^2 x - \operatorname{ctg}^2 x + \cos^2 x = 0. \end{array}$$

11. Să se arate că:

$$\begin{array}{l} \text{i)} \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x; \\ \text{ii)} \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x; \\ \text{iii)} (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2; \\ \text{iv)} \cos^4 x - \sin^4 x + 2 \sin^2 x = 1; \\ \text{v)} (1 - \sin x - \cos x)^2 = 2(1 - \cos x)(1 - \sin x). \end{array}$$

12. Să se arate că:

$$\begin{array}{l} \text{i)} \sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x; \\ \text{ii)} \sin^2 x - \sin^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} - \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}; \\ \text{iii)} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} - \cos^2 x = 0; \\ \text{iv)} \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 x}{\operatorname{ctg} x} = 1. \end{array}$$

13. Dacă $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$, atunci să se calculeze:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \sin x \cdot \cos x; & \text{ii)} \sin^3 x + \cos^3 x; & \text{iii)} \sin^4 x + \cos^4 x. \end{array}$$