

Grupuri

i) Considerații teoretice

Fie $G \neq \emptyset$ și $(x, y) \rightarrow x * y$ o lege de compoziție pe G .

Cuplul $(G, *)$ este grup dacă sunt îndeplinite condițiile (axiomele grupului):

- „ $*$ ” este peste tot definită pe G : $\forall x, y \in G \Rightarrow x * y \in G$;
- „ $*$ ” este asociativă: $(x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in G$;
- element neutru: $\exists e \in G$ a.î. $x * e = e * x = x, \forall x \in G$;
- element simetrizabil: $\forall x \in G, \exists x' \in G$ a.î. $x * x' = x' * x = e$ (x' este simetricul elementului x);

Observații. Fie grupul $(G, *)$.

1. Dacă legea „ $*$ ” este comutativă (adică $x * y = y * x = x, \forall x, y \in G$) atunci $(G, *)$ se numește **grup comutativ (abelian)**;

2. Dacă $*$ = +, atunci:

- ✓ $(G, +)$ se numește **grup aditiv**;
- ✓ elementul neutru e se mai notează 0_G ;
- ✓ simetricul elementului x din G se notează $-x$ și se numește *opusul elementului x* ;

3. Dacă $*$ = $\cdot$, atunci:

- ✓ $(G, \cdot)$ se numește **grup multiplicativ**;
- ✓ elementul neutru e se mai notează 1_G ;
- ✓ simetricul elementului x din G se notează x^{-1} sau $\frac{1}{x}$ și se numește *inversul elementului x* ;

4. elementul neutru „ e ” este *unic*;

5. pentru orice element $x \in G$ există un simetric unic x' .

Grupurile $(G, *)$ și $(G', \circ)$ se numesc **izomorfe** dacă există o funcție $f: (G, *) \rightarrow (G', \circ)$, cu proprietățile:

- 1) f este bijectivă;
- 2) $f(x * y) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in G$.

Dacă $(G, *)$ și $(G', \circ)$ sunt grupuri, atunci aplicația $f: (G, *) \rightarrow (G', \circ)$ se numește **morfism** de grupuri dacă este îndeplinită condiția $f(x * y) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in G$.

Observații.

1. Dacă grupurile $(G, *)$ și $(G', \circ)$ sunt izomorfe printr-o funcție f (se mai scrie $(G, *) \stackrel{f}{\cong} (G', \circ)$) atunci:

- ✓ $f(e) = e'$, unde e și e' sunt elementele neutre ale grupurilor $(G, *)$, respectiv $(G', \circ)$;
- ✓ $f(-x) = -f(x)$, unde $-x$ și $-f(x)$ sunt simetricile elementelor x , respectiv $f(x)$, în grupurile $(G, *)$, respectiv $(G', \circ)$.

ii) Exerciții rezolvate

1. Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian, dacă $G = (1; +\infty)$ și $x * y = xy - x - y + 2$.

Rezolvare.

i) partea stabilă dacă $\boxed{\forall x, y \in G \Rightarrow x * y \in G}$.

$$\left. \begin{array}{l} x \in G \Rightarrow x \in (1, +\infty) \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0 \\ y \in G \Rightarrow y \in (1, +\infty) \Rightarrow y > 1 \Rightarrow y - 1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (x-1)(y-1) > 0 \Rightarrow xy - x - y + 1 > 0 \mid +1 \Rightarrow xy - x - y + 2 > 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x * y > 1 \Rightarrow x * y \in (1, +\infty) \Rightarrow x * y \in G \Rightarrow$ legea „ $*$ ” este peste tot definită.

ii) asociativitatea $\boxed{\underbrace{(x * y)}_{M_1} * z = x * \underbrace{(y * z)}_{M_2}, \forall x, y, z \in G}$

$$M_1 = (x * y) * z = \underbrace{(xy - x - y + 2)}_a * z = a * z = az - a - z + 2 = (xy - x - y + 2)z - (xy - x - y + 2) - z + 2 =$$

$$= xyz - xz - yz + 2z - xy + x + y - 2 - z + 2 = xyz - (xz + yz + xy) + (x + y + z)$$

$$M_2 = x * (y * z) = x * \underbrace{(yz - y - z + 2)}_b = x * b = xb - x - b + 2 = x(yz - y - z + 2) - x - (yz - y - z + 2) + 2 =$$

$$= xyz - xy - xz + 2x - x - yz + y + z - 2 + 2 = xyz - (xz + yz + xy) + (x + y + z)$$

$M_1 = M_2 \Rightarrow$ legea „ $*$ ” este asociativă

iii) Element neutru: $\exists e \in G$ a.î. $x * e = e * x = x, \forall x \in G$;

$$x * e = x \Rightarrow xe - x - e + 2 = x \Rightarrow xe - e = x + x - 2 \Rightarrow e(x - 1) = 2(x - 1) \Rightarrow e = 2, x - 1 \neq 0$$

$$e * x = x \Rightarrow ex - e - x + 2 = x \Rightarrow ex - e = x + x - 2 \Rightarrow e(x - 1) = 2(x - 1) \Rightarrow e = 2, x - 1 \neq 0$$

În concluzie, elementul neutru este $e = 2$

iv) Element simetrizabil: $\forall x \in G, \exists x' \in G$ a.î. $x * x' = x' * x = e$

$$x * x' = 2 \Rightarrow xx' - x - x' + 2 = 2 \Rightarrow xx' - x' = x \Rightarrow x'(x - 1) = x \Rightarrow x' = \frac{x}{x - 1}, x - 1 \neq 0$$

$$x' * x = 2 \Rightarrow x'x - x' - x + 2 = 2 \Rightarrow x'x - x' = x \Rightarrow x'(x - 1) = x \Rightarrow x' = \frac{x}{x - 1}, x - 1 \neq 0$$

Trebuie să demonstrăm că

$$x' \in G \Leftrightarrow x' \in (1, +\infty) \Leftrightarrow x' > 1 \Leftrightarrow \frac{x}{x - 1} > 1 \Leftrightarrow \frac{x}{x - 1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{x - x + 1}{x - 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x - 1} > 0, (A)$$

În concluzie, elementul simetrizabil este $x' = \frac{x}{x - 1}$.

2. Să se arate că $(G, *)$ este grup abelian, dacă $G = (0; +\infty) \setminus \{1\}$ și $x * y = e^{\ln x \cdot \ln y}$.

Rezolvare.

i) partea stabilă dacă $\boxed{\forall x, y \in G \Rightarrow x * y \in G}$.

Fie $x, y \in G$ atunci $x * y = e^{\ln x \cdot \ln y} > 0$ și $e^{\ln x \cdot \ln y} \neq 1$, pentru că $e^{\ln x \cdot \ln y} = 1 \Leftrightarrow \ln x \cdot \ln y = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0$ sau $\ln y = 0 \Leftrightarrow x = 1$ sau $y = 1$, ceea ce este absurd.

ii) asociativitatea $\boxed{\underbrace{(x * y) * z}_{M_1} = \underbrace{x * (y * z)}_{M_2}, \forall x, y, z \in G}$

Fie $x, y, z \in G$ atunci $(x * y) * z = (e^{\ln x \cdot \ln y}) * z = e^{\ln x \cdot \ln y \cdot \ln z}$; la fel se obține și $x * (y * z) = e^{\ln x \cdot \ln y \cdot \ln z}$;

iii) Element neutru: $\exists e \in G$ a.î. $x * e = e * x = x, \forall x \in G$;

$$x * e' = x, \forall x \in G \Leftrightarrow e^{\ln x \cdot \ln e'} = x \Leftrightarrow \ln e^{\ln x \cdot \ln e'} = \ln x \Leftrightarrow \ln x \cdot \ln e' = \ln x \Rightarrow \ln e' = 1 \Leftrightarrow e' = e.$$

iv) Element simetrizabil: $\forall x \in G, \exists x' \in G$ a.î. $x * x' = x' * x = e$

Fie $x \in G$; se determină x' (simetricul elementului x în raport cu legea „ $*$ ”) din egalitatea $x * x' = e, \forall x \in G \Leftrightarrow$

$$e^{\ln x \cdot \ln x'} = e \Leftrightarrow \ln x \cdot \ln x' = 1 \Leftrightarrow x' = e^{\frac{1}{\ln x}} \in G.$$

v) „ $*$ ” este comutativă: $\forall x, y \in G \Leftrightarrow x * y = y * x$;

$$\text{Fie } x, y \in G \Leftrightarrow x * y = e^{\ln x \cdot \ln y} = e^{\ln y \cdot \ln x} = y * x.$$

3. Să se arate că $(M, *)$ este grup abelian, dacă: $M = \left\{ A; A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & x & 0 \\ z & y & x \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R}, x \neq -2 \right\}$ și $A * B = A \cdot B +$

$2(A + B + I_3), \forall A, B \in M$ („ $+$ ” și „ $\cdot$ ” reprezintă adunarea și înmulțirea matricilor).

Rezolvare.

Se verifică axiomele grupului:

P. „*” este peste tot definită pe M: $\forall A, B \in G$, cu $A = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ y_1 & x_1 & 0 \\ z_1 & y_1 & x_1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ y_2 & x_2 & 0 \\ z_2 & y_2 & x_2 \end{pmatrix}$, rezultă că

$$A * B = A \cdot B + 2(A + B + I_3) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & x & 0 \\ z & y & x \end{pmatrix} \in M,$$

unde $x = x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2 + 1)$, $y = y_1 x_2 + x_1 y_2 + 2(y_1 + y_2)$ și $z = z_1 x_2 + y_1 y_2 + x_1 z_2 + 2(z_1 + z_2)$.

A. “*” este asociativă dacă $(A * B) * C = A * (B * C)$ (proprietatea se verifică fără dificultate, ținând seama de P.);

N. element neutru: există $E \in M$ a.î. $A * E = E * A = A$, $\forall A \in M$. Matricea E se poate determina prin calcul direct din egalitatea $A * E = A$, $\forall A \in M$, sau altfel (ținând seama de reguli de calcul din inelul $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$):

$$A * E = A \Leftrightarrow A \cdot E + 2(A + E + I_3) = A \Leftrightarrow A \cdot E + 2A + 2E + 2I_3 - A = 0_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A \cdot E + 2E + A + 2I_3 = 0_3 \Leftrightarrow (A + 2I_3) \cdot E + (A + 2I_3) \cdot I_3 = 0_3. \text{ Așadar avem că:}$$

$$(A + 2I_3) \cdot (E + I_3) = 0_3 \quad (1); \text{ observând că dacă } A \in M \text{ și } A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & x & 0 \\ z & y & x \end{pmatrix} \Rightarrow A + 2I_3 = \begin{pmatrix} x+2 & 0 & 0 \\ y & x+2 & 0 \\ z & y & x+2 \end{pmatrix}$$

și $\det(A + 2I_3) = (x + 2)^3 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$,

deducem că matricea $A + 2I_3$ este inversabilă, deci există $(A + 2I_3)^{-1}$ în inelul $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

În aceste condiții egalitatea (1) devine: $(A + 2I_3)^{-1} \cdot (A + 2I_3) \cdot (E + I_3) =$

$$= (A + 2I_3)^{-1} \cdot 0_3 \Rightarrow E + I_3 = 0_3 \Rightarrow E = -I_3 \Rightarrow E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M;$$

S. elemente simetrizabile: $\forall A \in M, \exists A' \in M$ a.î. $A * A' = A' * A = E$.

Dată fiind matricea $A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ y & x & 0 \\ z & y & x \end{pmatrix}$ din M, simetrica acesteia A' se poate determina, prin calcul, din egalitatea

$A * A' = E$. Se poate proceda și astfel:

$$A * A' = E \Leftrightarrow A \cdot A' + 2(A + A' + I_3) = E \Leftrightarrow A \cdot A' + 2A + 2A' + 2I_3 = E \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A \cdot A' + 2A + 2A' + 2I_3 + I_3 = 0_3 \Leftrightarrow A \cdot A' + 2A' = -2A - 2I_3 \Leftrightarrow (A + 2I_3) \cdot A' = -2A - 2I_3 \quad (2).$$

Ținând seama că $\det(A + 2I_3) \neq 0$ deducem că există $(A + 2I_3)^{-1}$ în inelul $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Egalitatea (2) devine $(A + 2I_3)^{-1} (A + 2I_3) \cdot A' = -(A + 2I_3)^{-1} \cdot (2A + 2I_3)$, deci

$$A' = -(A + 2I_3)^{-1} (2A + 2I_3) \Leftrightarrow (A + 2I_3)^{-1} = \frac{1}{\det(A + 2I_3)} (A + 2I_3)^*,$$

$$\text{se obține: } A' = \begin{pmatrix} x' & 0 & 0 \\ y' & x' & 0 \\ z' & y' & x' \end{pmatrix}, x' = -\frac{2x+3}{4x+2}, y' = -\frac{y}{(x+2)^2}, z' = -\frac{y^2 - z(x+2)}{(x+2)^2}.$$

Se dovedește fără nici un fel de dificultate că $\forall A, B \in M \Leftrightarrow A * B = B * A$.