

Inecuații de gradul I

i) Considerații teoretice

Forma generală a unei inecuații de gradul I : $\boxed{ax + b < 0, ax + b > 0, ax + b \leq 0, ax + b \geq 0}$

Pentru a rezolva o inecuație de gradul I se parcurg aceleași etape ca la rezolvarea ecuației de gradul I.

Dacă la ecuația de gradul I soluția este un număr, la o inecuație de gradul I soluția este un interval de numere.

Dacă în urma efectuării calculului, termenul din partea stângă a inegalității este negativ, se înmulțește toată inecuația cu (-1) , schimbându-se astfel semnele tuturor termenilor dar și sensul inegalității.

ii) Exerciții rezolvate

1. Să se rezolve inecuațiile:

i) $4x - 5 > 3x + 1$;

ii) $2 - 3(1 - x) \leq 2x - 7$;

iii) $\frac{1-x}{2} - \frac{1}{6} \geq \frac{x+2}{3}$;

iv) $-2x + \sqrt{12} \leq \sqrt{3} + x$.

Rezolvare:

i) $4x - 5 > 3x + 1 \Rightarrow 4x - 3x > 1 + 5 \Rightarrow x > 6 \Rightarrow x \in (6, +\infty)$;

ii) $2 - 3(1 - x) \leq 2x - 7 \Rightarrow 2 - 3 + 3x \leq 2x - 7 \Rightarrow 3x - 2x \leq -7 - 2 + 3 \Rightarrow x \leq -6 \Rightarrow x \in (-\infty, -6]$;

iii) $\frac{1-x}{2} - \frac{1}{6} \geq \frac{x+2}{3} \Rightarrow 3(1-x) - 1 \geq 2(x+2) \Rightarrow 3 - 3x - 1 \geq 2x + 4 \Rightarrow -3x - 2x \geq 4 - 3 + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -5x \geq 2 \mid \cdot (-1) \Rightarrow 5x \leq -2 \Rightarrow x \leq -\frac{2}{5} \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{2}{5}\right]$;

iv) $-2x + \sqrt{12} \leq \sqrt{3} + x \Rightarrow -2x + 2\sqrt{3} \leq \sqrt{3} + x \Rightarrow -2x - x \leq \sqrt{3} - 2\sqrt{3} \Rightarrow -3x \leq -\sqrt{3} \mid \cdot (-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x \geq \sqrt{3} \Rightarrow x \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

2. Să se rezolve inecuațiile:

i) $\frac{1}{x-2} < 0$;

ii) $\frac{1-x}{x+3} \geq 0$;

iii) $\frac{x}{2-x} \leq 2$.

Rezolvare:

i) $\frac{1}{x-2} < 0 \Rightarrow x - 2 < 0 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow x \in (-\infty, 2)$;

ii) $\frac{1-x}{x+3} \geq 0$

Se rezolvă ecuațiile

$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$1-x$	+++++	0	-----	
$x+3$	-----	0	+++++	
$\frac{1-x}{x+3}$	-----	/	++++	0 -----

$$i) \frac{1}{x-2} < 0;$$

$$ii) \frac{1-x}{x+3} \geq 0;$$

$$iii) \frac{x}{2-x} \leq 2.$$

$$iii) \frac{x}{2-x} \leq 2 \Rightarrow \frac{x}{2-x} - 2 \leq 0 \Rightarrow \frac{x-4+2x}{2-x} \leq 0 \Rightarrow \frac{3x-4}{2-x} \leq 0.$$

Se rezolvă ecuațiile

$$3x-4=0 \Rightarrow 3x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$$

$$2-x=0 \Rightarrow -x=-2 \Rightarrow x=2$$

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	2	$+\infty$
3x-4	-----	0	+++++	+++++
2-x	+++++	+++++	0	-----
$\frac{3x-4}{2-x}$	-----	0	+++	/

3. Să se rezolve inecuațiile:

$$i) |x-1| \leq 2;$$

$$ii) |2-3x| < 5;$$

$$iii) \left| \frac{3x-1}{2} \right| \geq 7.$$

Rezolvare:

$$i) |x-1| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x-1 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3 \Rightarrow x \in [-1, 3];$$

$$ii) |2-3x| < 5 \Rightarrow -5 < 2-3x < 5 \Rightarrow -2 < -3x < 3 \Rightarrow -1 < x < \frac{7}{3} \Rightarrow x \in \left(-1, \frac{7}{3}\right)$$

$$iii) \left| \frac{3x-1}{2} \right| \geq 7 \Rightarrow \frac{3x-1}{2} \in (-\infty, -7] \cup [7, +\infty) \Rightarrow (3x-1) \in (-\infty, -14] \cup [14, +\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x \in (-\infty, -15] \cup [15, +\infty) \Rightarrow x \in (-\infty, -5] \cup [5, +\infty).$$

4. Să se rezolve inecuația $|x-2| < 2x-3$.

Rezolvare:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & x-2 \geq 0 \\ -x+2, & x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -x+2, & x < 2 \end{cases}$$

Caz 1. Dacă $x \in (-\infty, 2]$

$$-x+2 < 2x-3 \Rightarrow -x-2x < -3-2 \Rightarrow -3x < -5 \Rightarrow 3x > 5 \Rightarrow x > \frac{5}{3} \Rightarrow x \in \left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$$

$$S = \left(\frac{5}{3}, +\infty\right) \cap (-\infty, 2] = \left(\frac{5}{3}, 2\right].$$

Caz 2. Dacă $x \in (2, +\infty)$

$$x-2 < 2x-3 \Rightarrow x-2x < -3+2 \Rightarrow -x < -1 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x \in (1, +\infty)$$

$$S = (1, +\infty) \cap (2, +\infty) = (2, +\infty).$$

5. Să se rezolve sistemul de ecuații $\begin{cases} 4x-1 \leq 2+x \\ 3-3x \leq x-5 \end{cases}$

Rezolvare:

$$\begin{cases} 4x-1 \leq 2+x \\ 3-3x \leq x-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-x \leq 2+1 \\ -3x-x \leq -5-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x \leq 3 \\ -4x \leq -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 4x \geq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x \in [1, 2].$$

iii) Exerciții propuse

1. Să se rezolve inecuațiile următoare scriind soluțiile sub formă de intervale reprezentate pe axa numerelor:

- i) $x - 1 < 2; x + 2 > 4; x - 5 \leq 0; x + 3 \geq 4$;
- ii) $5x > 3x - 6; -2x \geq 4; -3x < 9; x \geq 5x + 20$;
- iii) $2x - 1 \leq 4; 3x + 1 > 2; -x \leq 2 + 2x$;
- iv) $7x - 2 < 12; -6x - 5 < 19; 41 < 5x - 4$;
- v) $4x - 18 > 3x + 2; 2x + 16 < 5x + 7; -5x + 1 < x - 35$.

2. Să se rezolve inecuațiile:

- i) $3(x + 4) - 4(x - 5) < 30; 2(3x + 7) + 5(1 - 6x) \geq 19$;
- ii) $x + 2(x + 3) - 4 \leq 1 - 4(x - 3); 2x - 1 - 3(2x - 1) \geq 4x + 6$;
- iii) $2x - (1 - x) + 6 > 5x + 2(1 - 8x) - 6; 1 - 3(x + 6) \leq 2 - (x - 1)$;
- iv) $4(2x + 1) - 2(-x + 22) \geq 6(x - 4); 4(3x + 2) - 14x > 69 - 3(2x + 3)$;
- v) $9(3x + 7) - 2(12x + 7) \leq 5(4x - 9) + 9$;
- vi) $3(2x + 1) - 5(1 - 2x) \leq 18 - 6(1 - 3x)$;
- vii) $5(3x + 14) - 4(5x + 12) > 2(x + 38) - 4(2x + 13) + 4$;
- viii) $-3(2x + 1) + 4(4x + 7) \leq -5(2x - 3) + 4(x + 3) + 78$.

3. Rezolvați inecuațiile:

- i) $\frac{x}{5} - \frac{1}{5} \geq 0; \frac{x}{2} + 3 > \frac{3}{2}; 11 < \frac{x}{4} - 3x$;
- ii) $2x < \frac{x}{5} - 9; x - \frac{5}{2} \leq \frac{3x}{2} + 1; \frac{2}{5} + \frac{x}{3} \leq \frac{x}{5} - \frac{1}{3}$;
- iii) $4 - \frac{x}{3} \geq \frac{1}{2} - x; \frac{5}{4} + \frac{2x}{3} - 1 < 2 - \frac{x}{2}; 5 - \frac{x}{5} \geq \frac{1}{4} + \frac{x}{2}$;
- iv) $0, 2x + 1 \leq 3, 4x - 2, 5; 4 - x < -0, 5x + 4, 1; 2, 5x + 3, 2 \leq 1 - 0, 5x$.

4. Rezolvați inecuațiile:

- a) $\frac{x}{2} > \frac{x}{3} + 0, (6); 1 - 1, (1)x \geq 1, (1)x - 1; \frac{3}{2} - 0, 4x \leq 1, 1(2)x$;
- b) $\frac{x - 2}{3} < \frac{x - 3}{2}; \frac{3x - 1}{4} - \frac{3 + 2x}{6} > \frac{x - 3}{2} - 1; \frac{x + 4}{5} - \frac{x + 6}{4} \leq 2$;
- c) $\frac{x - 1}{2} + \frac{x - 2}{4} \geq \frac{x + 3}{8} - \frac{x - 4}{2}; \frac{3(x - 1)}{10} + \frac{4(x + 2)}{5} < x - 3$;
- d) $\frac{4(x + 5)}{15} - \frac{3(x + 2)}{2} - \frac{6(x - 1)}{5} > \frac{2(x + 1)}{10} + x + 2$;
- e) $\frac{x + 1}{4} < \frac{1 - 3x}{5} + \frac{1 - x}{10}; \frac{2x - 5}{3} \geq \frac{2 - x}{6}$;
- f) $x - \frac{x - 2}{3} > \frac{1}{2} + x; 7x - \frac{x + 1}{2} \leq \frac{1 - 3x}{5}$.

5. Să se rezolve inecuațiile:

- i) $\sqrt{2} + x < \sqrt{3}; -x + \sqrt{3} \geq 2\sqrt{27}; -2x + \sqrt{12} \leq \sqrt{3}$;
- ii) $1 + \sqrt{3}x < x + \sqrt{3}; x\sqrt{3} - 4 < 4x - \sqrt{3}$;
- iii) $7x > x\sqrt{5} + \sqrt{5} - 7; 2(x + \sqrt{2}) - 5\sqrt{2} < \sqrt{2}(2x - 3) - 4$;
- iv) $x\sqrt{3} - 4 < 4x - \sqrt{3}; 7x > \sqrt{5} \cdot x + \sqrt{5} - 7$;
- v) $2(x + \sqrt{2}) - 5\sqrt{2} < \sqrt{2}(2x - 3) - 4$;
- vi) $(2x - 1)^2 - (x\sqrt{2} + 1)^2 \leq 2(x - 3)(x + \sqrt{2}) - 8\sqrt{2}$.

6. Să se rezolve inecuațiile următoare (cu necunoscuta x):

- i) $5x + 19 - 2(x + 7) \leq 5(2x + 5) + 22$;
- ii) $6(4x - 9) - 7(2x - 3) > 5(3x + 8) + 22$;
- iii) $5(3x + 14) - 4(5x + 12) > 2(x + 38) - 4(2x + 13) + 4$;
- iv) $3\{2(2x - 1) - 2[3(3x - 4) - 2(2x + 5)]\} < 3[9 - 5(3x - 2)] - 12$;
- v) $(x + 5)^2 - 7(x + 2) < (x - 4)(x + 4) - x$;
- vi) $\frac{3x - 4}{2} - \frac{5x - 2}{10} \leq \frac{3 - x}{5}$;
- vii) $\frac{7x - 11}{12} > \frac{2x - 5}{3} + \frac{3x - 1}{4} - \frac{3}{2}$;
- viii) $(2x + 1)^2 - (x - 3)(x + 3) > -4(2x - 1) + 3(x - 1)(x + 1)$.

7. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

- i) $-\frac{2}{3 - x} > 0$;
- ii) $\frac{5 - x}{-4} \leq 0$;
- iii) $\frac{9 - 5x + 2(x + 3)}{-3} < 2$;
- iv) $\frac{2(1 - x) + 3x - 5}{-2} < 1$;
- v) $\frac{3(x - 4) - 5(x + 4)}{-2} \leq 3$.

8. Să se rezolve:

- i) $(5x^2 + 8)[2(x + 3) - (x + 5)] \leq 0$; ii) $(x^2 + 10x + 25)[5(x - 3) - 7(x - 5)] \leq 0$;
- iii) $(2x - 1)(2x + 1) > 0$; iv) $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$ v) $-x^2 + 2x - 1 > 0$;
- vi) $\frac{x - 2}{x + 3} \leq 0$; vii) $\frac{2x - 3}{1 - x} \leq -1$; viii) $\left(1 + \frac{x + 5}{x - 2}\right)\left(1 + \frac{x - 5}{3}\right) > 0$;
- ix) $\frac{1}{x - 2} \geq 1$; x) $\frac{2x + 3}{x - 2} < 2$; xi) $\frac{1}{x + 1} \geq \frac{1}{x + 2}$; xii) $\frac{2x - 1}{2x + 1} < \frac{x - 1}{x + 1}$.

9. Să se determine $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât:

- i) $x + 3 < \frac{2x + 13}{3} < x + 5$;
- ii) $\frac{3(x - 2) + 5}{2} < x + 2 < \frac{4(x + 3) + 1}{3}$;
- iii) $\frac{2x + 5}{4} < x < \frac{3x + 13}{6}$;
- iv) $x - 1 < \frac{3x + 7}{4} < x + 2$;
- v) $x - 2 < \frac{2x + 3}{7} < x + 3$;
- vi) $\frac{2x + 3}{2} \leq \frac{3(x + 3)}{5} < \frac{4x + 13}{6}$.

10. Utilizând tabela de semn pentru expresii algebrice de forma $ax + b$, ($a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$), să se rezolve inecuațiile:

- i) $(x - 1)(x - 2) > 0$; $(x + 1)(x - 1) \leq 0$; $(2x - 1)(x - 1) > 0$;
- ii) $(-x + 2)(x - 5) < 0$; $-x(x + 1) > 0$; $(1 - x)(3x + 1) \leq 0$;
- iii) $(x - 4)(x - 3)(-x + 2) \geq 0$; $(-x + 2)(-x + 1)(-x + 5) > 0$;
- iv) $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 4) > 0$; $\left(-x + \frac{3}{2}\right)(x + 5) \leq 0$.

11. Să se rezolve inecuațiile:

$$\text{i)} \frac{5}{x-2} \geq 0; \frac{4}{-x+2} < 0; \frac{-5}{x+1} \leq 0;$$

$$\text{ii)} \frac{-2}{x+3} > 0; \frac{-5}{-x+2} < 0; \frac{-1}{-x-2} \leq 0;$$

$$\text{iii)} \frac{x-1}{x+1} > 0; \frac{-x+3}{x+5} > 0; \frac{x-4}{-x+1} \leq 0;$$

$$\text{iv)} \frac{2x}{x+1} \geq 0; \frac{3x-1}{x+3} < 0; \frac{-2x+1}{2x+6} \leq 0;$$

$$\text{v)} \frac{4x-1}{4x+1} < 0; \frac{-x+2}{-x-3} < 0; \frac{x+3}{2x+8} > 0.$$

12. Să se rezolve inecuațiile:

$$\text{i)} \frac{1}{x-2} > 1; \frac{1}{x+2} > \frac{1}{2}; \frac{4}{x-3} \leq -2;$$

$$\text{ii)} \frac{x}{x-3} > 3; \frac{x}{x-4} < 5; \frac{3x}{x-1} \leq -1;$$

$$\text{iii)} \frac{3x-2}{-3x+9} \geq 1; \frac{-x+4}{x+2} \geq 1; \frac{2x-1}{2x+1} \leq -3.$$

13. Rezolvați sistemele de inecuații:

$$\text{a)} \begin{cases} x-5 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases}; \begin{cases} x-2 < 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}; \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+3 < 0 \end{cases};$$

$$\text{b)} \begin{cases} 2x-5 > 1 \\ x+1 > 0 \end{cases}; \begin{cases} x-3 < 0 \\ -x+6 > 0 \end{cases}; \begin{cases} 4x-3 > 5 \\ 2x > 0 \end{cases};$$

$$\text{c)} \begin{cases} x-3 \geq 2x-1 \\ 4x-1 < x \end{cases}; \begin{cases} 2(3x-1) < 4(x+3) \\ x-5 < 2(x+1) \end{cases};$$

$$\text{d)} \begin{cases} x+3 > 15-3x \\ 6-7x \geq -3x-10 \end{cases}; \begin{cases} 2x < 4x+6 \\ 4x+3 < 2x+1 \end{cases}.$$

14. Să se rezolve sistemele de inecuații:

$$\text{i)} \begin{cases} 5x-3 \geq 1+x \\ \frac{1}{2}-3x \leq \frac{2x}{3}-5 \end{cases}; \begin{cases} 4-\frac{x-3}{2} \leq 3x \\ x-\frac{1}{2} > -\frac{2x+8}{3} \end{cases};$$

$$\text{ii)} \begin{cases} 4-\frac{x-2}{5}-\frac{1}{2} \geq \frac{1}{10}-\frac{x-2}{4} \\ 2x-1 < 1-\frac{4-x}{6} \end{cases}; \begin{cases} \frac{2x-1}{5} > \frac{x+1}{2}-\frac{23}{5} \\ \frac{3x+2}{7} < \frac{2x}{7}+6 \end{cases};$$

$$\text{iii)} \begin{cases} 3x+2 > x-2 \\ x+15 > 6-2x \\ x-14 < 5x-14 \end{cases}; \begin{cases} 4x-3 \geq 2x+7 \\ x-1 < 6 \\ 2x-3 \geq x \end{cases}.$$

15. Să se rezolve sistemele de inecuații:

$$\text{i)} -1 \leq 2x+3 \leq 2; 0 \leq 4x-5 < 3; 4 < 11x+3 < 2x-5;$$

$$\text{ii)} -2 \leq x + \frac{1}{2} < 4 - \frac{5x-1}{3}; \frac{2x-5}{3} < \frac{x-1}{4} < 1 - 2\left(x - \frac{1}{2}\right);$$

$$\text{iii)} -1 < \frac{x+2}{2x+5} < 1; 0 < \frac{x+2}{x+3} < 2.$$

16. Să se rezolve inecuațiile:

$$\text{i)} |x| \leq 2; |x| < 3; |2x| \leq 3;$$

$$\text{ii)} |x-1| \leq 1; |x-2| \leq 4; |3x-1| \leq 2;$$

iii) $|x| > 2$; $|x| \geq 3$; $|3x| \leq 6$;

iv) $|x-2| \geq 2$; $|x-4| \geq 1$; $|2x-3| \geq 2$.

17. Să se determine $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât:

i) $|x-5| \leq 3$; $|x| < 2$; $|x+4| \geq 5$;

ii) $|3x-1| \leq 6$; $|-x+2| \geq 1$; $|2x+9| \leq 9$.

18. Să se determine elementele mulțimilor A, B, C, D, dacă:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / |3x+2| \leq 7\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} / |x+4| > 1 \text{ si } |x+4| < 5\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z} / |2x-1| \leq 2\};$$

$$D = \{x \in \mathbb{Z} / |5-x| \leq 3 \text{ si } |x+1| \geq 5\}.$$

19. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

i) $|x-2| \leq 4$;

ii) $|3x-1| \leq 2$;

iii) $|8x-5| < -2$;

iv) $|x-7| \geq 3$;

v) $|x+3| > 1$;

vi) $|x+3| < 18$.

20. Să se rezolve în $\mathbb{R}$:

i) $|x-1|-2|x+2| \geq 1$;

ii) $|x+3| \leq |2x-1|$;

iii) $|2x+3| > x-2$;

iv) $|x+1|+|x-1|+|x+2| \leq 3x+2$;

v) $\left| \frac{1}{x-2} + 1 \right| < 2$;

vi) $\left| \frac{1}{x} - 3 \right| \geq 4$;

vii) $|x-2| \geq 2x-1$;

viii) $|x+2|+2|x^2-4|+|(2+x)(x+10)| \leq 0$.