

Logaritmi

i) Considerații teoretice

Noțiunea de *logaritm*

Dacă a și N sunt numere reale astfel încât $a > 0, a \neq 1$ și $N > 0$, atunci $\log_a N = y \Leftrightarrow N = a^y$

Observații.

- numărul real y se numește *logaritmul* în baza a al numărului N ;
- $N = a^{\log_a N}$;
- expresia $\log_a A$ are sens numai în condițiile $a > 0, a \neq 1$ și $A > 0$ (condițiile de existență pentru logaritmi);
- dacă în expresia $\log_a A$ se consideră $a=10$, atunci $\log_{10} A = \overset{\text{not}}{\lg A}$ și se numește *logaritmul zecimal* al numărului A , iar dacă $a=e$ ($e = 2,718\dots$ constanta lui Euler), atunci $\log_e A = \overset{\text{not}}{\ln A}$ și se numește *logaritmul natural* al numărului A .

Proprietăți ale *logaritmilor*:

1. $\log_a A = \log_b B \Leftrightarrow A = B, (A > 0, B > 0)$;
2. $\log_a a = 1; \log_a 1 = 0$;
3. $\log_a (A \cdot B) = \log_a A + \log_a B, (A > 0, B > 0)$;
4. $\log_a A^n = n \cdot \log_a A, (A > 0, n \in \mathbb{R})$;
5. $\log_a \left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B, (A > 0, B > 0)$;
6. $\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \cdot \log_a A, (A > 0, n \in \mathbb{N} \text{ și } n \geq 2)$;
7. $\log_a A = \log_b A \cdot \log_a b, (A > 0, b > 0 \text{ și } b \neq 1)$;
8. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, (a > 0, b > 0 \text{ și } a \neq 1, b \neq 1)$;
9. $\log_a A = \frac{\ln A}{\ln a}$;
10. $\forall b \in \mathbb{R} \Rightarrow b = \log_a a^b$;
11. dacă $a > 1$, atunci $\log_a A \leq \log_a B \Leftrightarrow A \leq B$ (compararea a doi logaritmi de aceeași bază supraunitară);
12. $u^v = a^{v \log_a u}$;
13. $u^v = e^{v \ln u}$;

ii) Exerciții rezolvate

1. Determinați valorile reale ale lui x pentru care au sens următorii radicali:

i) $\log_2 (x-1)$; ii) $\log_{\frac{1}{2}} (2-3x)$; iii) $\log_3 (x^2-1)$;

iv) $\lg (x^2-x-2)$; v) $\log_{x-1} (3x-2)$.

Rezolvare:

i) C.E.: $\begin{cases} x-1 > 0 \\ 2 > 0 \text{ (adevărat)} \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x \in (1; +\infty); \\ 2 \neq 1 \text{ (adevărat)} \end{cases}$

$$\text{ii) C.E.: } \begin{cases} 2-3x > 0 \\ \frac{1}{2} > 0 \text{ (adevărat)} \Leftrightarrow 2-3x > 0 \Leftrightarrow -3x > -2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right); \\ \frac{1}{2} \neq 1 \text{ (adevărat)} \end{cases}$$

$$\text{iii) C.E.: } \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ 3 > 0 \text{ (adevărat)} \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0; \text{ Ecuația atașată este } x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \\ 3 \neq 1 \text{ (adevărat)} \end{cases}$$

$$\text{Concluzie: } x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty);$$

$$\text{iv) C.E.: } \begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 \\ 10 > 0 \text{ (adevărat)} \Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0; \\ 10 \neq 1 \text{ (adevărat)} \end{cases}$$

$$\text{Ecuația atașată este } x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Concluzie: } x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty);$$

$$\text{v) C.E.: } \begin{cases} 3x - 2 > 0 \\ x - 1 > 0 \\ x - 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 2 \\ x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1; +\infty) - \{2\}.$$

2. Calculați:

$$\text{i) } \log_2 4 + \log_2 8 - \log_2 16;$$

$$\text{ii) } \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 \frac{2}{3} + \log_2 \frac{3}{4} + \dots + \log_2 \frac{33}{32};$$

Rezolvare:

$$\text{i) } \log_2 4 + \log_2 8 - \log_2 16 = \log_2 \frac{4 \cdot 8}{16} = \log_2 \frac{32}{16} = \log_2 2 = 1;$$

$$\text{ii) } \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 \frac{2}{3} + \log_2 \frac{3}{4} + \dots + \log_2 \frac{33}{32} = \log_2 \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{33}{32} = \log_2 \frac{1}{64} = \log_2 2^{-6} = -6$$

iii) Exerciții propuse

1. Calculați logaritmi:

$$\text{i) } \log_2 16;$$

$$\text{ii) } \log_3 81;$$

$$\text{iii) } \log_5 625;$$

$$\text{iv) } \log_6 216;$$

$$\text{v) } \log_3 \frac{1}{3};$$

$$\text{vi) } \log_3 \sqrt{3}$$

$$\text{vii) } \log_2 \frac{1}{8};$$

$$\text{viii) } \log_{\frac{1}{2}} 64;$$

$$\text{ix) } \log_{\frac{5}{6}} \frac{5}{6};$$

$$\text{x) } \log_{\sqrt{5}} 25;$$

$$\text{xi) } \log_{25} 36;$$

$$\text{xii) } \lg 100;$$

$$\text{xiii) } \lg \frac{1}{1000};$$

$$\text{xiv) } \lg \sqrt[3]{100};$$

$$\text{xv) } \log_7 \sqrt[3]{343}.$$

2. Determinați numărul real x din următoarele egalități:

$$\text{i) } 3^x = 5;$$

$$\text{ii) } 2^x = 7;$$

$$\text{iii) } 5^x = 4;$$

$$\text{iv) } 2^{x-3} = \frac{1}{2};$$

$$\text{v) } 3^{x+1} = \frac{1}{9}.$$

3. Aflați numărul real x din următoarele egalități:

$$\begin{array}{llll} \text{i)} \log_2 x = 4; & \text{ii)} \log_3 x = \frac{1}{2}; & \text{iii)} \log_5 x = -1; & \text{iv)} \lg x = 2; \\ \text{v)} \ln x = -1; & \text{vi)} \log_x \frac{1}{9} = 2; & \text{vii)} \log_x 5 = \frac{1}{2} \end{array}$$

4. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ așa încât următorii logaritmi să aibă sens:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \log_2 (3x-4); & \text{ii)} \log_5 (5-2x); & \text{iii)} \log_{\frac{2}{3}} (x^2-4); \\ \text{iv)} \log_{\sqrt{3}} (x^2-x); & \text{v)} \log_{\sqrt{2}} (1-x-2x^2); & \text{vi)} \log_{\frac{2}{3}} (x^2-6x+5); \\ \text{vii)} \lg (2x^2+5); & \text{viii)} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right); & \text{ix)} \lg \frac{5}{9-x^2}; \end{array}$$

5. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ așa încât următorii logaritmi să aibă sens:

$$\begin{array}{llll} \text{i)} \log_{2-x} 3; & \text{ii)} \log_{x^2-7} 11; & \text{iii)} \log_x (2x-1); & \text{iv)} \log_{1-x} (x-3); \\ \text{v)} \log_{2-x} (3-5x); & \text{vi)} \log_{x+2} (x^2-7x+12); & \text{vii)} \log_{\frac{1}{x-1}} (x+3) \end{array}$$

6. Să se calculeze:

$$\begin{array}{llll} \text{i)} \log_2 3 + \log_2 5; & \text{ii)} \log_3 \frac{1}{2} + \log_3 \frac{2}{3}; & \text{iii)} \lg 5 + \lg 20; & \text{iv)} \log_2 24 - \log_2 6; \\ \text{v)} \log_3 216 - \log_3 24; & \text{vi)} \log_{\frac{1}{3}} \frac{27}{5} - \log_{\frac{1}{3}} \frac{9}{5}; & \text{vii)} \log_{\frac{1}{2}} \frac{5}{7} - \log_{\frac{1}{2}} \frac{20}{7}; & \\ \text{viii)} \log_6 \left(\frac{1}{18} \right) + \log_6 \left(\frac{1}{12} \right); & \text{ix)} \log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 8; & \text{x)} \lg 2 + \lg 4 + \lg 125; & \\ \text{xi)} \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 \frac{3}{8} - \log_2 3; & \text{xii)} \log_5 6 + \log_5 35 - \log_5 42; & \text{xiii)} \log_{\frac{1}{3}} \frac{7}{3} - \log_{\frac{1}{3}} \frac{11}{3} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{11}{7}; & \\ \text{xiv)} \log_8 (\log_4 (\log_2 16)); & \text{xv)} \lg \frac{1}{2} + \lg \frac{2}{3} + \lg \frac{3}{4} + \dots + \lg \frac{99}{100}; & \text{(xvi)} \log_5 \sqrt{3} + \log_5 \sqrt{27} - 2 \log_5 3. & \end{array}$$

7. Să se arate că :

$$\begin{array}{l} \text{i)} \log_6 10 - \log_6 360 = -2; \\ \text{ii)} \log_{12} 18 + 3 \log_{12} 2 = 2; \\ \text{iii)} \frac{1}{2} \log_2 18 - \frac{1}{3} \log_2 54 = \frac{1}{6}; \\ \text{iv)} \log_2 14 + \log_2 3 - \log_2 6 = \log_2 7; \\ \text{v)} \log_5 \sqrt[3]{25} - \log_{\sqrt{5}} 5 - \log_{\frac{1}{5}} 625 = \frac{8}{3} \end{array}$$

8. Să se determine numărul real $x > 0$ în cazurile:

$$\begin{array}{l} \text{i)} \log_3 x = 2 + 3 \log_3 5 - 2 \log_3 4; \\ \text{ii)} \lg x = -1 + 2 \lg 3 - 3 \lg 5; \\ \text{iii)} \lg x = \lg 2 + \lg 5; \\ \text{iv)} \log_2 x = \frac{1}{2} \log_2 18 - \frac{1}{3} \log_2 54; \\ \text{v)} \log_6 x = \log_6 10 - \log_6 360; \end{array}$$

vi) $\log_{12} x = \log_{12} 18 + 3\log_{12} 2$.

9. Să se calculeze:

i) $\frac{3\lg 2 - \lg 24}{\lg 3 + \lg 27}$;

ii) $\frac{\log_3 2 + 3\log_3 0,25}{\log_3 28 - \log_3 7}$;

iii) $\log_3 27 - \log_{\sqrt{3}} 27 - \log_{\frac{1}{3}} 27$;

iv) $2\log_5 \sqrt[4]{5} + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}} 25 - \log_5^2 \sqrt{5} - 2$.

10. Să se compare numerele reale x și y în cazurile:

i) $x = \log_2 \frac{11}{12}$ și $y = \log_2 \frac{18}{19}$;

ii) $x = \log_4 11$ și $y = \log_4 (121)^{-1}$;

iii) $x = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{11}{12} \right)$ și $y = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{18}{19} \right)$;

iv) $x = \lg 0,18 - \lg 180$ și $y = \log_6 \frac{1}{18} + \log_6 \frac{1}{12}$;

v) $x = \log_5 125$ și $y = \frac{1}{1 - \log_{25} 5}$

11. Să se compare numerele reale x și y dacă:

i) $x = \log_2 11$ și $y = 0$;

ii) $x = \log_{\frac{1}{2}} 11$ și $y = 0$;

iii) $x = \log_{0,1} 5 + \log_{0,1} 4 - \log_{0,1} 2$ și $y = 0$;

12. Restângeți expresiile de mai jos:

i) $1 + \log_2 3 - \log_2 6$;

ii) $2\log_3 4 - 4\log_3 2$

iii) $2 - 3\log_3 5 - 2\log_3 \frac{1}{2}$;

iv) $\log_5 \sqrt[3]{2} - 2\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{2} + \log_{25} \sqrt[5]{\frac{1}{2}}$;

v) $1 + \log_2 2^2 + \log_2 2^3 + \log_2 2^4$;

vi) $\lg \frac{1}{10} + \lg \frac{1}{100} + \dots + \lg \frac{1}{10^{10}}$.

13. Dacă $\log_2 3 = a$ să se calculeze în funcție de a următoarele numere:

i) $\log_{18} 12$;

ii) $\log_{108} 9$;

iii) $\log_{54} 12$.