

Numere complexe

1) Forma algebrică a numerelor complexe

Exprimarea $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) se numește **forma algebrică a numărului complex z** .

Numerele reale x , respectiv y se numesc partea reală, respectiv parte imaginară pentru numărul complex z , notându-se, respectiv, $x = \operatorname{Re} z$ și $y = \operatorname{Im} z$.

Dacă $z_1 = x_1 + iy_1$ ($x_1, y_1 \in \mathbb{R}$) și $z_2 = x_2 + iy_2$ ($x_2, y_2 \in \mathbb{R}$), atunci :

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ și } y_1 = y_2 \text{ - egalitatea a două numere complexe;}$$

2) Operații cu numere complexe scrise sub formă algebrică

$\forall z_1 = (x_1; y_1)$ și $z_2 = (x_2; y_2) \in \mathbb{C}$, avem:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \text{ și} \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1); \\ z^{-1} &= \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Puterile naturale ale lui i sunt: $i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i, \forall k \in \mathbb{N}$

3) Numere complex conjugate

Fie $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) și $z \neq 0$.

Numărul complex $\bar{z} = x + i(-y) = x - iy$ se numește **conjugatul numărului complex z** .

Proprietăți ale numerelor complex conjugate:

- a) $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$; $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$, $z \in \mathbb{C}$;
- b) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$;
- c) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
- d) $\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n$, $\forall z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$;
- e) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
- f) $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \dots \cdot \bar{z}_n$, $\forall z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$;
- g) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $\forall z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}^*$.

4) Modulul unui număr complex

Fie $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) și $z \neq 0$. Numărul real $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ se numește **modulul numărului complex z** .

Proprietăți ale modulului:

- a) $|z| \geq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$ și $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
- b) $|\bar{z}| = |z|$, $z \in \mathbb{C}$;
- c) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$;
- e) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
- f) $|z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \dots \cdot |z_n|$, $\forall z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$;
- g) $|z^n| = |z|^n$, $\forall z \in \mathbb{C}$;
- h) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $\forall z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}^*$;

- f) $|z|=1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}, z \in \mathbb{C}^*$;
g) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

5) Rezolvarea în $\mathbb{C}$ a ecuației de gradul al doilea cu coeficienți reali

Fie $ax^2 + bx + c = 0, a \in \mathbb{R}^*, b, c \in \mathbb{R}$

Dacă $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \end{cases}$, ecuația are două soluții complexe, conjugate

6) Relațiile lui Viète

Fie $ax^2 + bx + c = 0, a \in \mathbb{R}^*, b, c \in \mathbb{R}$ cu rădăcinile $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$. Relațiile lui Viète sunt:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Formule utile:

- $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$
- $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 \cdot x_2 (x_1 + x_2)$

Dacă se cunosc rădăcinile $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$, ecuația de gradul 2 cu aceste soluții are forma

$$x^2 - Sx + P = 0, \text{ unde } S = x_1 + x_2, P = x_1 \cdot x_2$$

Dacă se cunosc rădăcinile $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$, ecuației $ax^2 + bx + c = 0, a \in \mathbb{R}^*, b, c \in \mathbb{R}$ atunci

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

7) Ecuații bipătrate cu coeficienți reali

Forma generală a unei ecuații bipătrate cu coeficienți reali este

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

Etape de rezolvare:

- se face substituția $x^2 = t$ și se obține ecuația de gradul al doilea $at^2 + bt + c = 0$

Caz 1: Dacă $\Delta \geq 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$ soluții reale;

Caz 2: Dacă $\Delta < 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-b \mp i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ soluții complexe, conjugate

- se rezolvă ecuațiile $x^2 = t_1$ și $x^2 = t_2$

Caz 1: Dacă $t_1, t_2 \in \mathbb{R}, t_1 > 0, t_2 < 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{t_1}$;

Caz 2: Dacă $t_1, t_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ atunci $x = \alpha + \beta i, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, apoi se rezolvă ecuațiile $(\alpha + \beta i)^2 = t_1$ și $(\alpha + \beta i)^2 = t_2$.

ii) Exerciții rezolvate

1. Fie numărul complex $z = 3i - 2$. Să se determine $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $\bar{z}$ și $|z|$.

Rezolvare.

$$z = 3i - 2 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z = -2 \\ \operatorname{Im} z = 3 \\ \bar{z} = \overline{3i - 2} = -3i - 2 \\ |z| = |3i - 2| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \end{cases}$$

2. Fie numerele complexe: $3 - 2i$; $4 + 5i$; $-3 - 7i$; $i - 5$; $-3i$; $-\frac{i}{2}$; $4i$; 3 ; -2 ; $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2(x+5)}i$. Să se precizeze pentru fiecare dintre aceste numere: $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $\bar{z}$ și $|z|$.

Rezolvare.

$$(i) \operatorname{Re}(3 - 2i) = 3; \operatorname{Re}(4 + 5i) = 4; \operatorname{Re}(-3 - 7i) = -3; \operatorname{Re}(i - 5) = -5;$$

$$\operatorname{Re}(-3i) = 0; \operatorname{Re}\left(-\frac{i}{2}\right) = 0; \operatorname{Re}(4i) = 0; \operatorname{Re}3 = 3; \operatorname{Re}(-2) = -2; \operatorname{Re}\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2(x+5)}i\right) = \sqrt[3]{x}$$

$$(ii) \operatorname{Im}(3 - 2i) = -2; \operatorname{Im}(4 + 5i) = 5; \operatorname{Im}(-3 - 7i) = -7; \operatorname{Im}(i - 5) = 1; \operatorname{Im}(-3i) = -3;$$

$$\operatorname{Im}\left(-\frac{i}{2}\right) = -\frac{1}{2}; \operatorname{Im}(4i) = 4; \operatorname{Im}3 = 0; \operatorname{Im}(-2) = 0; \operatorname{Im}\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2(x+5)}i\right) = \sqrt[3]{2(x+5)}.$$

$$(iii) \overline{3 - 2i} = 3 + 2i; \overline{4 + 5i} = 4 - 5i; \overline{-3 - 7i} = -3 + 7i; \overline{i - 5} = -i - 5; \overline{-3i} = 3i; \overline{-\frac{i}{2}} = \frac{i}{2}; \overline{4i} = -4i; \overline{3} = 3; \overline{-2} = -2;$$

$$\overline{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2(x+5)}i} = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2(x+5)}i$$

$$(iv) |3 - 2i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5; |4 + 5i| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}; |-3 - 7i| = \sqrt{58};$$

$$|i - 5| = \sqrt{(-5)^2 + 1^2} = \sqrt{26}; |-3i| = \sqrt{(-3)^2} = 3; \left|-\frac{i}{2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2};$$

$$|4i| = \sqrt{4^2} = 4; |3| = 3; |-2| = 2; \left|\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2(x+5)}i\right| = \sqrt{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{2(x+5)}\right)^2}.$$

3. Să se determine numerele reale x și y pentru care are loc egalitatea:

$$(3x + 1) + yi = (2x + y) + (3 - x)i.$$

Rezolvare.

Două numere complexe sunt egale dacă au părțile reale, respectiv coeficienții părților imaginare egale, deci

$$\text{egalitatea din enunț este echivalentă cu: } \begin{cases} 3x + 1 = 2x + y \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

4. Să se deducă o regulă generală pentru calculul lui i^n , $n \in \mathbb{N}$.

Rezolvare.

$$\begin{array}{l|l} i = i & i^5 = i^4 \cdot i = i \\ i^2 = -1 & i^6 = i^5 \cdot i = -1 \\ i^3 = -i & i^7 = i^6 \cdot i = -i \\ i^4 = 1 & i^8 = i^7 \cdot i = 1 \end{array} \Rightarrow \text{acest lucru ne sugerează că puterile lui } i \text{ se repetă „din patru în patru”}.$$

Deoarece restul împărțirii unui număr natural la 4 poate fi 0, 1, 2 sau 3, rezultă că orice număr natural n poate avea una din formele: $n = 4k$, $n = 4k + 1$, $n = 4k + 2$ sau $n = 4k + 3$, $k \in \mathbb{N}$;

$$\text{Re\u021binem c\u0103: } i^n = \begin{cases} 1, \text{ dac\u0103 } n = 4k; \\ i, \text{ dac\u0103 } n = 4k + 1; \\ -1, \text{ dac\u0103 } n = 4k + 2; \\ -i, \text{ dac\u0103 } n = 4k + 3; \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Concluzie: $i^n = i^r$, unde r este restul \u00mp\u0103r\u021birii lui n la 4.

5. Fie numerele complexe $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -2i + 1$, $z_3 = i$. S\u0103 se calculeze:

i) $(z_1 + z_2) + z_3, z_1 + (z_2 + z_3), (z_1 + z_3) + z_2, z_1 + (z_3 + z_2);$

ii) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3, z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3);$

iii) $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3}.$

Rezolvare.

i) $(z_1 + z_2) + z_3 = [(2 - i) + (-2i + 1)] + i = (-3i + 3) + i = -2i + 3$; analog se calculeaz\u0103 celelalte expresii \u0219i se

ob\u021bine: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_3) + z_2 = z_1 + (z_3 + z_2) = -2i + 3$;

ii) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = [(2 - i) \cdot (-2i + 1)] \cdot i = (-4i + 2i^2 + 2 - i) \cdot i = -5i^2 = 5$;

$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (2 - i) \cdot [(-2i + 1) \cdot i] = (2 - i)(-2i^2 + i) = 5$;

iii) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - i}{-2i + 1} = \frac{(2 - i)(2i + 1)}{(2i + 1)(-2i + 1)} = \frac{3i + 4}{5}$; $\frac{z_2}{z_3} = \frac{-2i + 1}{i} = \frac{-i(-2i + 1)}{1} = 2 - i$;

$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} = \frac{3i + 4}{5} + 2 - i = \frac{14 - 2i}{5}.$

6. Determina\u021bi num\u0103rul complex z pentru care $3z - 2\bar{z} = 4 - 5i$.

Rezolvare.

Fie $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = \overline{x + yi} = x - yi$

$3(x + iy) - 2(x - iy) = 4 - 5i \Rightarrow 3x + 3iy - 2x + 2iy = 4 - 5i \Rightarrow x + 5iy = 4 - 5i \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 4, y = 5 \Rightarrow z = 4 + 5i.$

7. Determina\u021bi num\u0103rul complex z pentru care $z - 1 = |z| - 2i$.

Rezolvare.

Fie $z = x + yi \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$z - 1 = |z| - 2i \Leftrightarrow x + iy - 1 = \sqrt{x^2 + y^2} - 2i \Leftrightarrow x - 1 + iy = \sqrt{x^2 + y^2} - 2i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow x - 1 = \sqrt{x^2 + 4}$

Prin ridicare la p\u0103trat, vom ob\u021bine: $x^2 - 2x + 1 = x^2 + 4 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \Rightarrow z = -\frac{3}{2} - 2i.$

8. Se consider\u0103 $a \in \mathbb{R}$ \u0219i num\u0103rul complex $z = 2 + (2 - 5a)i$. S\u0103 se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $z \in \mathbb{R}$.

Rezolvare.

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2 - 5a = 0 \Rightarrow -5a = -2 \Rightarrow a = \frac{2}{5}.$

9. S\u0103 se rezolve \u00een $\mathbb{C}$ ecua\u021bia $x^2 - 8x + 25 = 0$.

Rezolvare.

$\begin{matrix} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 25 \end{matrix} \Rightarrow \Delta = -36 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{8 - i\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{8 - i\sqrt{36}}{2} = \frac{8 - 6i}{2} = 4 - 3i \\ x_2 = \frac{8 + i\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{8 + i\sqrt{36}}{2} = \frac{8 + 6i}{2} = 4 + 3i \end{cases}.$

10. Să se rezolve ecuația $z^4 - 2z^2 - 8 = 0$.

Rezolvare.

$$\text{Notăm } z^2 = t \Rightarrow t^2 - 2t - 8 = 0, \Delta = 36 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 4 \\ t_2 = -2 \end{cases}$$

$$z^2 = t_1 \Rightarrow z^2 = 4 \Rightarrow z_1 = 2, z_2 = -2;$$

$$z^2 = -2 \Rightarrow z^2 = 2i^2 \Rightarrow z_3 = i\sqrt{2}, z_4 = -i\sqrt{2}.$$

11. Să se rezolve ecuația $z^4 - 6z^2 + 25 = 0$.

Rezolvare.

$$\text{Notăm } z^2 = t \Rightarrow t^2 - 6t + 25 = 0, \Delta = -64 \Rightarrow t_1 = \frac{6 - i\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{6 - 8i}{2} = 3 - 4i \text{ și}$$

$$t_2 = \frac{6 + i\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{6 + 8i}{2} = 3 + 4i$$

A rezolva ecuația $z^2 = t_1 \Rightarrow z^2 = 3 - 4i$ revine la a determina numărul complex $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$.

$$(a + bi)^2 = 3 - 4i \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + 2abi = 3 - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ ab = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ b = \frac{-2}{a} \end{cases}$$

$$a^2 - \left(\frac{-2}{a}\right)^2 = 3 \Leftrightarrow a^2 - \frac{4}{a^2} = 3 \Leftrightarrow a^4 - 3a^2 - 4 = 0$$

$$\text{Notăm } a^2 = y \Rightarrow y^2 - 3y - 4 = 0, \Delta = 25, y_1 = -1, y_2 = 4$$

$$a^2 = 4 \Rightarrow a_1 = -2, a_2 = 2 \text{ și } a^2 = -1 \Rightarrow a \notin \mathbb{R}$$

$$a_1 = -2 \Rightarrow b_1 = \frac{-2}{-2} = 1 \text{ și } a_2 = 2 \Rightarrow b_2 = \frac{-2}{2} = -1$$

Prin urmare, $z_1 = -2 + i$ și $z_2 = 2 - i$.

Similar se rezolvă ecuația $z^2 = 3 + 4i$ și se obțin soluțiile $z_3 = 2 + i$ și $z_4 = -2 - i$.

12. Să se determine valoarea parametrului real m dacă $x^2 - (m - i)x + 20 + 5i = 0$ admite o rădăcină reală.

Rezolvare.

$$\text{Fie } \alpha \text{ rădăcina reală} \Rightarrow \alpha^2 - (m - i)\alpha + 20 + 5i = 0 \Rightarrow \alpha^2 - m\alpha + i\alpha + 20 + 5i = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha^2 - m\alpha + 20) + i(\alpha + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 - m\alpha + 20 = 0 \\ \alpha + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 - m\alpha + 20 = 0 \\ \alpha = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -9 \\ \alpha = -5 \end{cases}$$

13. Să se determine parametrul complex m dacă ecuația $2mz^2 - (m + i)z + i - 3 = 0$ admite rădăcina $z = 1 - i$.

Rezolvare.

$$\text{Înlocuim pe } z \text{ cu } (1 - i) \text{ avem: } 2m(1 - i)^2 - (m + i)(1 - i) + i - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2m(1 - 2i + i^2) - (m + i - mi - i^2) + i - 3 = 0 \Rightarrow -3mi - m - 4 = 0 \Rightarrow m(-3i - 1) = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = \frac{4}{-3i - 1}. \text{ Amplificăm cu conjugatul și obținem:}$$

$$m = \frac{4}{-3i - 1} = \frac{4(3i - 1)}{9 + 1} = \frac{4(3i - 1)}{10} = \frac{2(3i - 1)}{5} = \frac{6i - 2}{5}.$$

14. Să se scrie ecuația de gradul 2 cu coeficienți reali care are o soluție de forma $x_1 = \frac{1 - i}{1 + i}$.

Rezolvare.

$$\text{Folosim formula } x^2 - Sx + P = 0, S = x_1 + x_2, P = x_1 \cdot x_2$$

$$x_1 = \frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)^2}{1^2 - i^2} = \frac{1 - 2i + i^2}{2} = \frac{-2i}{2} = -i \Rightarrow x_2 = \overline{x_1} = i \text{ este cealaltă soluție a ecuației de gradul 2.}$$

$$S = x_1 + x_2 = -i + i = 0, P = (-i) \cdot i = -i^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 0 \cdot x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0.$$

15. Să se rezolve ecuația $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$.

Rezolvare.

$$x^4 - 3x^2 + 1 = 0$$

$$\text{Notăm } x^2 = t \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0, \Delta = 1, t_1 = 1, t_2 = 2$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1; x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

16. Fără a rezolva ecuația $x^2 - x + 2 = 0$ să se calculeze:

$$\text{i) } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}; \quad \text{ii) } x_1^2 + x_2^2; \quad \text{iii) } x_1^3 + x_2^3; \quad \text{iv) } \frac{1}{x_1 + 2} + \frac{1}{x_2 + 2}; \quad \text{v) } \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1};$$

$$\text{vi) } \frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}.$$

Rezolvare.

$$x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \text{Viete} \\ \Rightarrow \end{array} \right. \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 2 \end{cases}$$

$$\text{i) } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{1}{2};$$

$$\text{ii) } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 1 - 2 = -1;$$

$$\text{iii) } x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 1 - 3 \cdot 1 \cdot 2 = -5;$$

$$\text{iv) } \frac{1}{x_1 + 2} + \frac{1}{x_2 + 2} = \frac{x_2 + 2 + x_1 + 2}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} = \frac{x_1 + x_2 + 4}{x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4} = \frac{5}{8};$$

$$\text{v) } \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = -\frac{1}{2};$$

$$\text{vi) } \frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{(x_1 x_2)^2} = -\frac{5}{4}.$$

17. Determinați forma ecuației de gradul al doilea care are rădăcinile complexe $x_1 = 1 - i$ și $x_2 = 1 + i$.

Rezolvare.

$$x^2 - Sx + P = 0, \text{ unde } S = x_1 + x_2 \text{ și } P = x_1 x_2$$

$$S = x_1 + x_2 = 1 - i + 1 + i = 2; P = x_1 x_2 = (1 - i)(1 + i) = 1 - i^2 = 2$$

$$\text{Ecuația cerută are forma: } x^2 - 2x + 2 = 0.$$

18. Descompuneți în factori liniari trinomialul de gradul al doilea $x^2 - 3x + 5$.

Rezolvare.

$$x^2 - 3x + 5 = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$x^2 - 3x + 5 = 0; \Delta = -11 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3 - i\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{3 - i\sqrt{11}}{2} \\ x_2 = \frac{3 + i\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{3 + i\sqrt{11}}{2} \end{cases}$$

$$x^2 - 3x + 5 = \left(x - \frac{3 - i\sqrt{11}}{2}\right) \left(x - \frac{3 + i\sqrt{11}}{2}\right).$$

iii) Exerciții propuse

1. Fie numerele complexe: $3-7i$; $2+3i$; $-6-i$; $2i-4$; $-6i$; $-\frac{1}{3}$; $7i$; 6 ; -7 ; $\sqrt{x} + \sqrt{2xi}$. Să se precizeze pentru fiecare dintre aceste numere: $\operatorname{Re}(z)$ și $\operatorname{Im}(z)$.

2. Să se determine numerele reale x și y pentru care au loc egalitățile:

i) $(3x-4)+2i=2+(3-y)i$;

ii) $(4-5x)+(3-2y)i=2-5i$;

iii) $(x+2y)+(-3x+y)i=-1+4i$;

iv) $(1-2i)x+(1+2i)y=1+i$;

v) $(2+i)x-(2-i)y=x-2y+3i$.

3. Să se calculeze:

i) $(5-7i)+(1+3i)$; ii) $(-2+i)+(3-5i)$; iii) $3(2-4i)-2(1-i)$; iv) $\left(\frac{1}{2}-i\right)-\left(2-\frac{i}{2}\right)$;

v) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}i\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i\right)$; vi) $\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}i\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}i\right)$; vii) $\sqrt{3}(\sqrt{18}+i\sqrt{12})$; viii) $\sqrt{2}(\sqrt{50}+i\sqrt{8})$.

4. Să se calculeze:

i) $(2+i)(4+3i)$; ii) $(1-i)(2+3i)$; iii) $(4i-3)(4i+3)$; iv) $(i+2)^2$; v) $(2i-3)^2$; vi) $(i-\sqrt{3})(\sqrt{3}+2i)$;

vii) $(1-i\sqrt{2})^2$; viii) $(1+i)(1+2i)(1+3i)$; ix) $(1-i)^3$; x) $\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

5. Scrieți opusul și inversul următoarelor numere complexe:

i) $z_1=1-i$; ii) $z_2=2-3i$; iii) $z_3=-1+4i$; iv) $z_4=3+i\sqrt{2}$; v) $z_5=-\sqrt{3}+i\sqrt{2}$.

6. Să se scrie sub formă algebrică numerele complexe z , în următoarele cazuri:

i) $z = \frac{1}{5+4i}$; ii) $z = \frac{1}{5-4i}$; iii) $z = \frac{1-i}{1+i}$; iv) $z = \frac{1}{i}$; v) $z = (-5+i)(3+2i)$; vi) $z = \left(\frac{3-5i}{i}\right)^2$;

vii) $z = \frac{1+i}{3-i} + \frac{i}{3+i}$; viii) $z = \frac{(1+i)(1-i)(1+2i)(1-2i)}{(1+i)^3 + (1-i)^3}$.

7. Fie numerele complexe $z_1=1-i$, $z_2=i+3$, $z_3=2i+1$. Să se calculeze:

i) $(z_1+z_2)+z_3$, $z_1+(z_2+z_3)$, $(z_1+z_3)+z_2$, $z_1+(z_3+z_2)$;

ii) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$, $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$;

iii) $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3}$.

8. Să se calculeze:

i) i^{26} ; ii) i^{63} ; iii) i^{103} ; iv) i^{1002} ; v) $(-i)^{225}$; vi) $(-i)^{432}$; vii) $1+i+i^2+\dots+i^{10}$; viii) $1 \cdot i \cdot i^2 \cdot \dots \cdot i^{99}$;

ix) $(1+i)^6$; x) $(1+i)^{44}$.

9. Determinați conjugatele următoarelor numere complexe:

i) $z_1=2+3i$; ii) $z_2=-i$; iii) $z_3=i-2$; iv) $z_4=-1-3i$; v) $z_5=-2\sqrt{2}i+\sqrt{3}$; vi) $z_6=(-i-1)(i+2)$;

vii) $z_7=\left(-\frac{1}{2}i+1\right)\left(\frac{3}{2}+i\right)$; viii) $z_8=(1-3i)(2i-3)$; ix) $z_9=(-3i)(1-4i)$.

10. Să se scrie sub formă algebrică:

i) $z = \frac{2+3i}{1+i}$; ii) $z = \frac{1-i}{1+i} - \frac{1+i}{1-i}$; iii) $z = \frac{2-3i}{2i+1} - \frac{1-5i}{1-2i}$; iv) $z = \frac{i}{(1-i)^2} - \frac{i+1}{(1+i)^2}$.

11. Să se determine $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât:

i) $iz + 2\bar{z} = 1-i$; ii) $(1+i)z + i\bar{z} = 3+2i$; iii) $2z + 3\bar{z} = 6+3i$; iv) $\bar{z} - z = 2-3i$;

v) $i \cdot \bar{z} + (1 - 2i) \cdot z = \overline{2i - 5} + i$.

12. Se dau numerele complexe $z_1 = 1 + i, z_2 = -2 - i, z_3 = 3i - 2$. Să se calculeze:

i) $|z_1|, |z_2|, |z_3|$; ii) $|z_1 - z_2 + z_3|, |-2z_1 + z_2 - z_3|$; iii) $|z_1 \cdot z_2|, |z_2 \cdot z_3|, |z_3 \cdot z_1|$;

iv) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right|, \left| \frac{z_2}{z_3} \right|, \left| \frac{z_3}{z_1} \right|$; v) $|z_1^2|, |z_2^2|, |z_3^2|$; vi) $\left| \frac{z_3 \cdot z_1^2}{z_2^3} \right|$.

13. Determinați numerele complexe $z \in \mathbb{C}$, din următoarele relații:

i) $|z| - z = 1 - i$; ii) $|z| = z + 1 + 2i$; iii) $2z + 3|z| = 21 + 8i$; iv) $z^2 - 5|z| + 6 = 0$;

14. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $z \in \mathbb{R}$.

i) $z = -3 + (3a - 9)i$; ii) $z = \frac{1}{3} + (1 - a^2)i$; iii) $z = 2 + (a^2 - 3a + 2)i$.

15. Să se rezolve în $\mathbb{C}$ următoarele ecuații:

i) $x^2 + 1 = 0$; ii) $x^2 + 11 = 0$; iii) $x^2 = -100$; iv) $(x - 1)^2 = -9$; v) $x^2 - 2x + 2 = 0$;

vi) $x^2 - 3x + 4 = 0$; vii) $x^2 - 6x + 13 = 0$; viii) $4x^2 - 4x + 17 = 0$;

16. Să se descompună în factori, expresiile:

i) $x^2 - 2x + 2 = 0$; ii) $x^2 + 6x + 10 = 0$; iii) $x^2 - 10x + 26 = 0$; iv) $4x^2 - 4x - 5 = 0$; v) $9x^2 - 12x + 13 = 0$;

17. Fie ecuația de gradul al doilea $x^2 - x + 2 = 0$ cu soluțiile x_1, x_2 . Fără a rezolva ecuația dată, să se calculeze:

i) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; ii) $x_1^2 + x_2^2$; iii) $\frac{1}{x_1 + 2} + \frac{1}{x_2 + 2}$; iv) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; v) $x_1^3 + x_2^3$; vi) $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$.

18. Fie ecuația de gradul al doilea $x^2 - 2x + 3 = 0$ cu soluțiile x_1, x_2 . Fără a rezolva ecuația dată, să se calculeze:

i) $x_1^2 + x_2^2$; ii) $x_1^3 + x_2^3$; iii) $x_1^4 + x_2^4$; iv) $\frac{x_1}{x_2^3} + \frac{x_2}{x_1^3}$; v) $\frac{x_1 + 1}{x_2^2 + 1} + \frac{x_2 + 1}{x_1^2 + 1}$.

19. Să se formeze ecuația de gradul al doilea cu coeficienți reali care are una dintre soluții egală cu:

i) $2 - i$; ii) $3i - 2$; iii) $i(i + 1)$; iv) $\frac{1}{-1 - i}$; v) $\frac{i + 3}{2 - i}$.

20. Dacă x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - x - 3 = 0$ să se formeze ecuația de gradul al doilea cu soluțiile y_1, y_2 , știind că:

i) $y_1 = x_1 - 2, y_2 = x_2 - 2$; ii) $y_1 = 3 + x_1, y_2 = 3 + x_2$; iii) $y_1 = \frac{1}{x_1}, y_2 = \frac{1}{x_2}$; iv) $y_1 = \frac{1}{x_1 - 1}, y_2 = \frac{1}{x_2 - 1}$;

v) $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$.

21. Rezolvați următoarele ecuații bipătrate:

i) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; ii) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$; iii) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$; iv) $x^4 - 10x^2 + 16 = 0$;

v) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$; vi) $4x^4 + 4x^2 + 1 = 0$.