

Polinoame reducibile

- $f \in \mathbb{C}[x]$ se numește reducibil pe $\mathbb{C}$ dacă $\exists g, h \in \mathbb{C}[x]$ de grad cel puțin 1, a.î. $\boxed{f = g \cdot h}$.

Ex: ① $f = x^2 - 1$, $f \in \mathbb{R}[x]$ este reducibil pe $\mathbb{R}$.

$$f = x^2 - 1^2 = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{grad } 1}}{(x-1)} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{grad } 1}}{(x+1)} \Rightarrow f = \text{reducibil pe } \mathbb{R}.$$

② $f = x^3 - 3x + 2$ $f \in \mathbb{R}[x]$ este reducibil pe $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f &= x^3 - x - 2x + 2 = x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = x(x-1)(x+1) - 2(x-1) = \\ &= (x-1)(x^2 + x - 2) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{grad } 1}}{(x-1)} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{grad } 1}}{(x-1)} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{grad } 1}}{(x+2)} \text{ de la ex anterior} \\ \Rightarrow f &\text{ este reducibil pe } \mathbb{R} \end{aligned}$$

- $f \in \mathbb{C}[x]$, grad $f \geq 1$, care nu este reducibil pe $\mathbb{C}$, se numește irreducibil pe $\mathbb{C}$.

Ex: ① $f = x^2 + x + 1$ $f \in \mathbb{R}[x]$ este irreducibil pe $\mathbb{R}$?

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Delta = -3 < 0 \Rightarrow x_1, x_2 \notin \mathbb{R} \Rightarrow f = \text{irreducibil pe } \mathbb{R}.$$

⚠ (Atenție) Acelai polinom $f = x^2 + x + 1$, $f \in \mathbb{C}[x]$?

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

$$\Delta = -3 = 3i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = i\sqrt{3}.$$

$$x_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$x^2 + x + 1 = 1 \cdot \left(\frac{2}{x} - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{2}{x} - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right) =$$

$$= \left(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{grad } 1}}{\frac{2x + 1 + i\sqrt{3}}{2}} \right) \left(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{grad } 1}}{\frac{2x + 1 - i\sqrt{3}}{2}} \right) \Rightarrow f \text{ reducibil pe } \mathbb{C}$$

Concluzie: Este foarte importantă mulțimea în care se rezolvă ecuația. atârnată de polinomului.

$$\bullet \text{ Dacă } f \in \mathbb{C}[x] \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{grad } f = n \geq 1 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{f = ct \cdot (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n)} \\ \downarrow \\ \text{descompunerea lui } f \text{ în factori ireductibili}$$

Cazuri particulare

$$1) f = ax^2 + bx + c \Rightarrow f = a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$2) f = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$3) f = ax^4 + bx^3 + cx^2 + d \Rightarrow f = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

Ex: ① Descomp. în factori ireductibili polinomul $f \in \mathbb{R}[x]$

$$f = x^4 - 12x^2 + 35$$

$$f(x) = x^4 - 12x^2 + 35$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 12x^2 + 35 = 0$$

$$\text{Not } \boxed{x^2 = t} \Rightarrow t^2 - 12t + 35 = 0$$

$$\Delta = 144 - 140 = 4$$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{12-2}{2} = 5 \\ t_2 = \frac{12+2}{2} = 7 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 = t_1 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \\ x^2 = t_2 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7} \end{array} \right\} \Rightarrow S = \{-\sqrt{7}; -\sqrt{5}; \sqrt{5}; \sqrt{7}\}$$

$$f = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) = 1(x+\sqrt{7})(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})(x-\sqrt{7})$$

② Descomp. în factori ireductibili polinomul $f \in \mathbb{R}[x]$

$$f = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \underbrace{x^3 + x^2}_{x^2(x+1)} + \underbrace{x+1}_{(x+1)} = 0 \Rightarrow x^2(x+1) + (x+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)(x^2+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0. \Rightarrow \boxed{x=-1} \\ x^2+1=0 \end{cases}$$

$$\Delta = 0-4 = -4 < 0. \Rightarrow x_1, x_2 \notin \mathbb{R}.$$

$$f = (x+1)(x^2+1)$$

$\hookrightarrow$ irreducible decomposition

③ $f = x^4 - x^2 - 4x - 4, f \in \mathbb{Z}[x]$ Decomp in fact mod, $\mathbb{Q}[x]$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^4 - x^2 - 4x - 4 = 0. \Rightarrow x^2(x^2-1) - 4(x+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(x-1)(x+1) - 4(x+1) = 0 \Rightarrow (x+1)(x^3 - x^2 - 4) = 0. \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1} \\ x^3 - x^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

$$x^3 - x^2 - 4 = 0. \Rightarrow x^3 - 2x^2 + x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2(x-2) + (x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-2)(x^2+x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2} \\ x^2+x+2=0, \Delta = -7 < 0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$f = (x+1)(x-2)(x^2+x+2)$$