

POLINOAME

Fie $\mathbb{C}[X] = \{ f \mid f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \dots \}$
 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0 \}$

↓
multimea polinoamelor cu coeficienți complecși de nedeterminată X
↓
polinom de grad n

Obs :

① Dacă $n=0$ și $a_0 \neq 0 \Rightarrow \boxed{f = a_0}$ - polinom constant

② $\boxed{f=0}$ se numește polinom nul

③ $\boxed{f=1}$ se numește polinom unitate.

④ $\boxed{f = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$ - forma algebrică a unui polinom.

unde: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ - coeficienți polinomului f

- a_0 - termenul liber

- a_n - coeficient dominant

- X - nedeterminată.

- $\boxed{n = \text{grad } f}$ - gradul polinomului f .

Fie $f = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$

$g = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$

atunci $\boxed{f=g \Leftrightarrow m=n \text{ și } \begin{cases} a_0=b_0 \\ a_1=b_1 \\ \vdots \\ a_m=b_m \end{cases}}$ - polinoame egale sau identice

Exp : 1. Dem. că polim. $f = (x-1)(x^2-5x+6)$ și $g = (x-3)(x^2-3x+2)$ sunt egale

↓

①

$$f = (x-1)(x^2-5x+6) = x(x^2-5x+6) - 1(x^2-5x+6) = x^3 - 5x^2 + 6x - x^2 + 5x - 6 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$$g = (x-3)(x^2-3x+2) = x(x^2-3x+2) - 3(x^2-3x+2) = x^3 - 3x^2 + 2x - 3x^2 + 9x - 6 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$\text{grad } f = \text{grad } g = 3$ și toți coeficienții egali $\Rightarrow f = g$.

2. $a, b, c = ?$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât polinoamele

$$f = 3x^2 - ax + 4$$

$$g = bx^3 + (2c-1)x^2 - 3x + 4, \quad f, g \in \mathbb{R}[X] \text{ să fie egale.}$$

$$f = 3x^2 - ax + 4 \Rightarrow \text{grad } f = 2$$

$$g = bx^3 + (2c-1)x^2 - 3x + 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{grad } g = 3, b \neq 0 \\ \text{grad } g = 2, \begin{cases} b = 0 \\ 2c-1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c \neq \frac{1}{2} \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\text{grad } f = \text{grad } g = 2 \Leftrightarrow \boxed{b=0}, \boxed{c \neq \frac{1}{2}}$$

$$f = g \Leftrightarrow \begin{cases} 2c-1 = 3 \\ -3 = -a \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ a = 3 \\ b = 0 \end{cases}$$

Valoarea polinomului f într-un punct " α ".

Fix $\alpha \in \mathbb{C}$

Numărul $\boxed{f(\alpha) = a_n \alpha^n + \dots + a_1 \alpha + a_0}$ se numește val. pol. f în pct. " α ".

Dacă $f(\alpha) = 0$ atunci α este rădăcină a polim. f .

Exp: 1. Fic $f = 2x^3 - x^2 + 3x - 2$.

Calculați: $f(-1)$; $f(2)$; $f(-\sqrt{2})$; $f(i)$

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 2 = -2 - 1 - 3 - 2 = -8$$

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 2^2 + 3 \cdot 2 - 2 = 16 - 4 + 6 - 2 = 16$$

$\Downarrow$

(2)

$$f(-\sqrt{2}) = 2 \cdot (-\sqrt{2})^3 - (-\sqrt{2})^2 + 3 \cdot (-\sqrt{2}) - 2 = 2 \cdot (-2\sqrt{2}) - 2 - 3\sqrt{2} - 2 = -4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 4 = -7\sqrt{2} - 4.$$

$$\boxed{\begin{matrix} i^2 = -1 & i^4 = 1 \\ i^3 = -i \end{matrix}}$$

$$f(i) = 2 \cdot i^3 - i^2 + 3i - 2 = -2i + 1 + 3i - 2 = i - 1.$$

2. $\{ \text{Fie } f = x^3 - 2x^2 + 3x - a, \quad f \in \mathbb{R}[x] \}$
 $a = ?, a \in \mathbb{R} \quad a. \text{ } f \text{ nă admite răd. } x_1 = -1$

$$\boxed{x_1 = -1} \text{ răd a lui } f \Rightarrow \boxed{f(-1) = 0.}$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - a = -1 - 2 - 3 - a = -6 - a.$$

$$\text{Cum } f(-1) = 0 \Rightarrow -6 - a = 0 \Rightarrow -a = 6 \Rightarrow a = -6.$$

Operații cu polinoame.

i) Adunarea polinoamelor:

$$\left. \begin{aligned} f &= a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \quad f \in \mathbb{C}[x] \\ g &= b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0, \quad g \in \mathbb{C}[x]. \end{aligned} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f + g = a_n x^n + \dots + (a_n + b_m) x^m + \dots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0),$$

considerând că $n \geq m$.

$$\boxed{\text{grad}(f+g) \leq \max \{ \text{grad } f, \text{grad } g \}.}$$

Exp: 1. $\left\{ \begin{aligned} f &= x^2 - x - 3, \quad f \in \mathbb{Z}[x] \\ g &= x^3 + 2x^2 + 4x - 7, \quad g \in \mathbb{Z}[x]. \end{aligned} \right. \quad h = 4x - 5, \quad h \in \mathbb{Z}[x]$

a) $f+g, g+f$

b) ~~$f+g, g+f$~~ . $(f+g)+h, f+(g+h)$.

c) $f-2g+3h$

a) $f+g = x^2 - x - 3 + x^3 + 2x^2 + 4x - 7 = x^3 + 3x^2 + 3x - 10.$

$$g+f = x^3+2x^2+4x-7+x^2-x-3 = x^3+3x^2+3x-10$$

Obs că $f+g=g+f \Rightarrow "$ polim. este comutativă

$$b) (f+g)+h = (x^2-x-3+x^3+2x^2+4x-7)+4x-5 = \underline{x^3+3x^2+3x-10} + \underline{4x-5}$$

$$= x^3+3x^2+7x-15$$

$$f+(g+h) = x^2-x-3+(x^3+2x^2+4x-7+4x-5) = \underline{x^2-x-3} + \underline{x^3+2x^2+8x-12}$$

$$= x^3+3x^2+7x-15$$

Obs că $(f+g)+h=f+(g+h) \Rightarrow "$ pol este asociativă

$$c) f-2g+3h = \dots \text{calcul}$$

ii) Inmultirea polinoamelor

$$\left. \begin{aligned} f &= a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \\ g &= b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0, \quad f, g \in \mathbb{C}[x], n \geq m. \end{aligned} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \cdot g = a_n b_m x^{n+m} + \dots + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + a_0 b_0.$$

$$\boxed{\text{grad } f \cdot g = \text{grad } f + \text{grad } g.}$$

Exp: 1. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Fie } f=2x-1, g=x^2+1, h=2x-x^2 \quad f, g, h \in \mathbb{R}[x] \end{array} \right\}$

$$a) f+h, h+f$$

$$b) (f+h)+g, f+(h+g).$$

$$c) \text{grad}(g \cdot h) \text{ prin 2 metode.}$$

$$a) \left. \begin{aligned} f+h &= 2x-1+2x-x^2 = -x^2+4x-1 \\ h+f &= 2x-x^2+2x-1 = -x^2+4x-1 \end{aligned} \right| \Rightarrow " \text{ este comutativă}$$

$$b) (f+h)+g = \underline{-x^2+4x-1} + \underline{x^2+1} = 4x.$$

$$f+(h+g) = 2x-1 + (2x-x^2+x^2+1) = \underline{2x-1} + \underline{2x+1} = 4x \quad \left| \Rightarrow " \text{ este asoc.} \right.$$

$$c) \text{grad}(g \cdot h) = \text{grad } g + \text{grad } h = 2+2=4.$$

$$g \cdot h = (x^2+1)(2x-x^2) = x^2(2x-x^2) + 1(2x-x^2) = 2x^3-x^4+2x-x^2 = -x^4+2x^3-x^2+2x$$

$$\Rightarrow \text{grad}(g \cdot h) = 4$$

(4)

2. Fie $f = (m^2 - 9)x^3 + (m+3)x^2 + (m-3)x + 2$, $f \in \mathbb{R}[X]$
 $g = 2x^2 - 3x + 1$, $g \in \mathbb{R}[X]$

- a) discutați gradul pol f după valorile parametrului real m ;
 b) pt $m=3$, determinați grad $f \cdot g$ prin 2 metode.
 c) calculați $f^2 - g^2$ pt $m=-3$.

a) $f = (m^2 - 9)x^3 + (m+3)x^2 + (m-3)x + 2$.

$$m^2 - 9 = 0 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3.$$

caz 1: Dacă $m \neq \pm 3 \Rightarrow m^2 - 9 \neq 0 \Rightarrow \text{grad } f = 3$.

caz 2: Dacă $m = 3 \Rightarrow f = \underbrace{(3^2 - 9)}_0 x^3 + (3+3)x^2 + \underbrace{(3-3)}_0 x + 2$

$$f = 6x^2 + 2 \Rightarrow \text{grad } f = 2.$$

caz 3: Dacă $m = -3 \Rightarrow f = \underbrace{((-3)^2 - 9)}_0 x^3 + \underbrace{(-3+3)}_0 x^2 + \underbrace{(-3-3)}_0 x + 2$

$$f = -6x + 2 \Rightarrow \text{grad } f = 1.$$

b) $m=3 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f = 6x^2 + 2 \\ g = 2x^2 - 3x + 1 \end{array} \right| \Rightarrow f \cdot g = (6x^2 + 2)(2x^2 - 3x + 1) = 6x^2(2x^2 - 3x + 1) + 2(2x^2 - 3x + 1) = 12x^4 - 18x^3 + 6x^2 + 4x^2 - 6x + 2 = 12x^4 - 18x^3 + 10x^2 - 6x + 2$

$$\Rightarrow \text{grad}(f \cdot g) = 4. \text{ (calcul)}$$

$$\text{grad}(f \cdot g) = \text{grad } f + \text{grad } g = 2 + 2 = 4. \text{ (formulă)}$$

c) $m=-3 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f = -6x + 2 \\ g = 2x^2 - 3x + 1 \end{array} \right| \Rightarrow f^2 - g^2 = (f-g)(f+g) = \left[\begin{array}{l} -6x + 2 - (2x^2 - 3x + 1) \\ -6x + 2 + (2x^2 - 3x + 1) \end{array} \right]$

$$= (-2x^2 - 3x + 1)(2x^2 - 9x + 3) = -2x^2(2x^2 - 9x + 3) - 3x(2x^2 - 9x + 3) + 1(2x^2 - 9x + 3) = -4x^4 + 18x^3 - 6x^2 - 6x^3 + 27x^2 - 9x + 2x^2 - 9x + 3 = -4x^4 + 12x^3 + 23x^2 - 18x + 3$$

iii) Împărțirea polinoamelor

Fie $f, g \in \mathbb{C}[x]$, $g \neq 0$.

atunci există și sunt unice două polinoame $\rho, r \in \mathbb{C}[x]$ a. i.

$$\boxed{f = g \cdot \rho + r, \text{ grad } r < \text{grad } g}$$

unde: f - deîmpărțitul
 g - împărțitorul
 ρ - câtul
 r - restul.

↳ teorema împărțirii cu rest.

Obs: Dacă $r=0 \Rightarrow f = g \cdot \rho \Rightarrow \boxed{f : g}$ (f divizibil cu g).

Exp: 1. $\boxed{f = x^2 - 4x + 7}$
 $\boxed{g = x - 1}$ $\rho, r = ?$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 4x + 7 & x - 1 \\ -x^2 + x & \underline{x - 3} \quad \rho \\ \hline & (-3x) + 7 \\ & +3x - 3 \\ \hline & \underline{4} \quad r \end{array}$$

Etape:

- $x^2 : x = x$
- ~~se trece x cu semn~~ efectuăm calculul $x \cdot (x-1) = x^2 - x$
- trecem $x^2 - x$ cu semn schimbat în partea stg.
- se efect. calc în partea stg
- se coborâm 7
- $(-3x) : x = -3$
- efectuăm $-3(x-1) = -3x + 3$
- trecem în stg cu semn schimbat
- efectuăm calc în stg.

Verificare: $(x-1) \cdot (x-3) + 4 =$
 $= x(x-3) - 1(x-3) + 4 =$
 $= x^2 - 3x - x + 3 + 4 = x^2 - 4x + 7 = f$
 (A)

2. $\boxed{f = 6x^3 - 7x^2 + 3x + 2}$
 $\boxed{g = 3x + 1}$ $\rho, r = ?$

↓

$$\begin{array}{r}
 6x^3 - 7x^2 + 3x + 2 \quad | \quad 3x+1 \\
 \underline{-6x^3 - 2x^2} \\
 / \quad -9x^2 + 3x \\
 \quad \underline{+9x^2 + 3x} \\
 \quad / \quad 6x + 2 \\
 \quad \quad \underline{-6x - 2} \\
 \quad \quad / \quad /
 \end{array}$$

Donc, $c(x) = 2x^2 - 3x + 2$
 $r = 0$.

$\Rightarrow f : (3x+1)$

Etape

- ① $6x^3 : 3x = 2x^2$
- ② $2x^2(3x+1) = 6x^3 + 2x^2$
- ③ $\text{sig} - 6x^3 - 2x^2$
- ④ $\text{colon } 3x$
- ⑤ $(-9x^2) : 3x = -3x$
- ⑥ $-3x \cdot (3x+1) = -9x^2 - 3x$
- ⑦ $\text{sig } 9x^2 + 3x$
- ⑧ $\text{colon } 2$
- ⑨ $6x : 3x = 2$
- ⑩ $2(3x+1) = 6x + 2$
- ⑪ $\text{sig} - 6x - 2$

③ $f = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$
 $g = x - i$ $c, r = ?$

$$\begin{array}{r}
 x^3 + 2x^2 - 3x + 4 \quad | \quad x-i \\
 \underline{-x^3 + ix^2} \\
 / \quad (2+i)x^2 - 3x \\
 \quad \underline{-(2+i)x^2 + (1+2i)x} \\
 \quad / \quad (2i-2)x + 4 \\
 \quad \quad \underline{-(2i-2)x - 2i-2} \\
 \quad \quad / \quad (-2i+2)
 \end{array}$$

$r = -2i + 2$

$c(x) = x^2 + (2+i)x + (2i-2)$

Etape :

- ① $x^3 : x = x^2$
- ② $x^2(x-i) = x^3 - x^2i$
- ③ $\frac{(2+i)x^2}{x} = (2+i)x$
- ④ $(2+i)x \cdot (x-i) = (2x+ix)(x-i) = 2x(x-i) + ix(x-i) = 2x^2 - 2ix + ix^2 + i^2x = (2+i)x^2 - (1+2i)x$
- ⑤ $(2i-2)x : x = 2i-2$
- ⑥ $(2i-2) \cdot (x-i) = (2i-2)x + (2i-2) \cdot (-i) = 2ix - 2x + 2 + 2i = (2i-2)x + 2i + 2$