

Progresii aritmetice

i) Considerații teoretice

Un șir de numere reale în care fiecare termen începând cu al doilea, se obține din termenul precedent prin adăugarea aceluiași număr se numește *progresie aritmetică*.

Dacă a_1 este primul termen al progresiei, r rația iar $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ este suma primilor n termeni ai progresiei, atunci au loc formulele:

$$a_k = a_{k-1} + r, k \geq 2, r = \text{rația progresiei};$$

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, k \geq 2 \text{ (formula mediei)};$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r, n \in \mathbb{N}, r = \text{rația progresiei (formula termenului general)};$$

$$a_1 + a_n = a_k + a_{n-k+1} \text{ (formula sumei termenilor egal depărtați)};$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n - \text{suma a } n \text{ numere aflate în progresie aritmetică}$$

ii) Exerciții rezolvate

1. Determinați termenii necunoscuți ai progresiei aritmetice $(a_n): a_1, a_2, 4, a_4, 10, a_6, \dots$.

Rezolvare.

$$a_3 = 4, a_5 = 10 \Rightarrow a_5 = a_3 + 2r \Rightarrow 10 = 4 + 2r \Rightarrow r = 3$$

$$a_3 = a_2 + r \Rightarrow 4 = a_2 + 3 \Rightarrow a_2 = 1; a_2 = a_1 + r \Rightarrow 1 = a_1 + 3 \Rightarrow a_1 = -2;$$

$$a_6 = a_1 + 5r \Rightarrow a_6 = -2 + 15 \Rightarrow a_6 = 13$$

2. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ în care se cunosc $a_4 = \frac{3}{2}$ și $r = \frac{1}{2}$. Determinați:

i) $2a_{10} + 3a_{15}$;

ii) Suma primilor 20 de termeni.

Rezolvare.

$$i) a_{10} = a_4 + 6r \Rightarrow a_{10} = \frac{3}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow a_{10} = 3; a_{15} = a_{10} + 5r \Rightarrow a_{15} = 3 + 5 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow a_{15} = \frac{11}{2}$$

$$2a_{10} + 3a_{15} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot \frac{11}{2} = 6 + \frac{33}{2} = \frac{45}{2};$$

$$ii) S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Rightarrow S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20$$

$$a_4 = a_1 + 3r \Rightarrow \frac{3}{2} = a_1 + 3 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = 0; a_{20} = a_{15} + 5r \Rightarrow a_{20} = \frac{11}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow a_{20} = 8$$

$$S_{20} = \frac{0+8}{2} \cdot 20 = 80.$$

3. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică. Dacă $a_n = 199, n = 100, S_n = 10000$, să se determine a_1 și r .

Rezolvare.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Rightarrow 10000 = \frac{a_1 + 199}{2} \cdot 100 \Rightarrow \frac{a_1 + 199}{2} = 100 \Rightarrow a_1 = 1$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 199 = 1 + 99 \cdot r \Rightarrow 99r = 198 \Rightarrow r = 2.$$

4. Se dau șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ cu termenul general: $a_n = 2n + 3$ și $b_n = \frac{n}{n+1}$. Care dintre cele două șiruri reprezintă o progresie aritmetică?

Rezolvare.

$a_n = 2n + 3, a_{n+1} = 2(n+1) + 3 = 2n + 5 \Rightarrow a_{n+1} - a_n = (2n + 5) - (2n + 3) = 2 \Rightarrow (a_n)_{n \geq 1}$ este progresie aritmetică;

$b_n = \frac{n}{n+1}, b_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \Rightarrow b_{n+1} - b_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+2} \neq \text{ct.} \Rightarrow (b_n)_{n \geq 1}$ nu este progresie aritmetică.

5. Determinați $x \in \mathbb{R}$ astfel încât numerele $4x - 3, 2 - 3x, 5x - 1$ să fie în progresie aritmetică.

Rezolvare.

$4x - 3, 2 - 3x, 5x - 1$ sunt în progresie aritmetică dacă: $2 - 3x = \frac{4x - 3 + 5x - 1}{2} \Rightarrow$

$$4 - 6x = 9x - 4 \Rightarrow 15x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{15}$$

6. Dacă (a_n) este o progresie aritmetică în care cunoaștem că $a_2 + a_4 = 16$ și $a_1 \cdot a_5 = 28$, să se determine a_1 și r .

Rezolvare.

$$\begin{cases} a_2 + a_4 = 16 \\ a_1 \cdot a_5 = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + r + a_1 + 3r = 16 \\ a_1 \cdot (a_1 + 4r) = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 4r = 16 \\ a_1 \cdot (a_1 + 4r) = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2r = 8 \\ a_1 \cdot (a_1 + 4r) = 28 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 8 - 2r \\ (8 - 2r) \cdot (8 + 2r) = 28 \end{cases}$$

$$(8 - 2r) \cdot (8 + 2r) = 28 \Rightarrow 64 - 4r^2 = 28 \Rightarrow 4r^2 = 36 \Rightarrow r = \pm 3$$

$$\text{Dacă } r = 3 \Rightarrow a_1 = 8 - 6 = 2;$$

$$\text{Dacă } r = -3 \Rightarrow a_1 = 8 + 6 = 14.$$

7. Să se calculeze suma $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 75$.

Rezolvare.

Termenii sumei sunt termenii unei progresii aritmetice (a_n) cu $a_1 = 1$ și $r = 1$;

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 75 = 1 + (n - 1) \Rightarrow n = 75$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Rightarrow S_n = \frac{1 + 75}{2} \cdot 75 = \frac{76}{2} \cdot 75 = 38 \cdot 75$$

8. Să se rezolve ecuația $5 + 8 + 11 + \dots + x = 670$

Rezolvare.

Observăm că termenii sumei sunt în progresie aritmetică $a_1 = 5, a_2 = 8 \Rightarrow r = a_2 - a_1 = 3$

$$\begin{aligned} S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Rightarrow 670 = \frac{5 + x}{2} \cdot n \\ a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow x = 5 + (n - 1)3 \Rightarrow x = 3n + 2 \end{aligned} \quad \left| \Rightarrow 670 = \frac{5 + 3n + 2}{2} \cdot n \Rightarrow \right.$$

$$\Rightarrow 670 = \frac{n(3n + 7)}{2} \Rightarrow 3n^2 + 7n = 1340 \Rightarrow 3n^2 + 7n - 1340 = 0$$

Rezolvând ecuația, obținem soluțiile:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1340) = 16129 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 127$$

$$n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 - 127}{6} = \frac{-134}{6} = -\frac{67}{3} \notin \mathbb{N}$$

$$n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 + 127}{6} = \frac{120}{6} = 20 \Rightarrow x = 3 \cdot 20 + 2 \Rightarrow x = 62$$

iii) Exerciții propuse

1. Să se scrie primii cinci termeni ai progresiei aritmetice $\div (a_n)$ în următoarele cazuri:

i) $a_1 = 2$ și $r = 5$;

ii) $a_{10} = 131$ și $r = 12$;

iii) $a_5 = 27$ și $a_{27} = 60$;

iv) $a_3 = 11$ și $a_5 = 19$.

2. Să se determine termenul a_1 al progresiei aritmetice $\div (a_n)$ dacă:

i) $a_{10} = 131$ și $r = 12$;

ii) $a_{52} = -125$ și $r = -5$;

iii) $a_{200} = 0$ și $r = -3$;

iv) $a_{44} = 13,5$ și $r = 0,5$.

3. Dacă (a_n) este o progresie aritmetică, să se determine $a_1, \dots, a_5$ și $S_5 = a_1 + \dots + a_5$, în următoarele cazuri:

i) $a_1, a_2, 5, 7, a_5, \dots$;

ii) $a_1, a_2, -6, -\frac{9}{2}, a_5, \dots$;

iii) $a_1, -12, a_3, a_4, 0, \dots$;

iv) $a_1, 4, a_3, 14, a_5, \dots$.

4. Dacă (a_n) este o progresie aritmetică, determinați rația r în cazurile:

i) $a_7 = -4, a_8 = -5$;

ii) $a_{20} = 55, a_{19} = 52$;

iii) $a_{10} = 5, a_9 = \frac{9}{2}$;

iv) $a_{13} = -\frac{12}{7}, a_{12} = -\frac{11}{7}$;

v) $a_n = 3n - 5, a_{n-1} = 3n - 8$;

vi) Pentru fiecare din progresiile date, determinați S_6, S_8, S_{15} și S_{40} .

5. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică.

i) dacă $a_1 = 23, a_n = 5$ și $r = -2$, să se determine n și S_n ;

ii) dacă $a_1 = 3, a_n = 39, S_n = 210$, să se determine n și r ;

iii) dacă $a_n = 18, r = 2, S_n = 88$, să se determine a_1 și n ;

iv) dacă $a_3 = 8, a_4 = 5, S_n = 28$, să se determine n ;

v) dacă $n \geq 5, a_2 + a_4 = 16, a_1 \cdot a_5 = 28$, să se determine a_1 și r .

6. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică.

i) dacă $a_n = 97, r = 3$ și $S_n = 1612$, să se determine n și a_1 ;

ii) dacă $a_1 = -7, r = 3$ și $S_n = 430$, să se determine n și a_n ;

- iii) dacă $a_1 = 3, a_n = 21$ și $S_n = 120$, să se determine r și n ;
 iv) dacă $S_n = 2, a_3 = 8, a_4 = 5$, să se determine a_1, a_n și n ;
 v) dacă $S_2 + S_4 = 33$ și $a_1 \cdot a_8 = 46$, să se determine a_1 și r ;
 vi) dacă $a_1 + 2a_5 = 0$ și $S_4 = 14$, determinați a_1 și r .

7. Dacă (a_n) este progresie aritmetică, să se determine a_1 și r în următoarele cazuri:

- i) $a_2 - a_6 + a_4 = -7$ și $a_8 - a_7 = 2a_4$;
 ii) $a_1 a_2 a_3 = 120$ și $a_1 + a_2 + a_3 = 15$;
 iii) $a_1 + a_2 + a_3 = 12$ și $a_2 + a_3 + a_4 = 18$.

8. Dacă (a_n) este o progresie aritmetică, să se determine a_1 și r în cazurile:

$$\begin{aligned} \text{i)} \begin{cases} a_6 - a_{11} = 5 \\ a_6 + 2a_{11} = -34 \end{cases}; \quad \text{ii)} \begin{cases} a_3 + a_5 = 12 \\ 2a_3 - 3a_5 = -11 \end{cases}; \quad \text{iii)} \begin{cases} a_4 + 2a_7 = -\frac{9}{2}; \\ 2a_4 - a_7 = 1 \end{cases}; \quad \text{iv)} \begin{cases} 3a_2 + a_{10} = 4 \\ a_2 - 3a_{10} = -\frac{17}{3} \end{cases}; \\ \text{v)} \begin{cases} a_1 + a_2 = 10 \\ a_2 + a_3 = 18 \end{cases}; \quad \text{vi)} \begin{cases} a_2 - a_6 + a_4 = -7 \\ a_8 - a_7 = 2a_4 \end{cases}; \quad \text{vii)} \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 12 \\ a_2 + a_3 + a_4 = 18 \end{cases}; \quad \text{viii)} \begin{cases} a_1 + 2a_5 = 0 \\ a_1 + a_4 = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

9. Dacă (a_n) este o progresie aritmetică, să se determine a_1 și r în următoarele cazuri:

$$\begin{aligned} \text{i)} \begin{cases} a_1 a_4 + a_6 = 14 \\ a_1 + a_2 + a_5 = 12 \end{cases}; \quad \text{ii)} \begin{cases} a_1^2 + a_4^2 = 101; \\ a_2 + a_6 = 20 \end{cases}; \quad \text{iii)} \begin{cases} a_1^2 + a_3^2 = 50 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 12 \end{cases} \end{aligned}$$

10. Determinați $x \in \mathbb{R}$ astfel încât numerele a, b și c să fie în progresie aritmetică, dacă:

- i) $a = 1; b = x + 3; c = 5$;
 ii) $a = 2x + 1; b = 1; c = 2x + 5$;
 iii) $a = 6x - 1; b = x + 2; c = 3x - 2$;
 iv) $a = 1; b = x^2; c = 17$;
 v) $a = -3; b = x^2 - 2x; c = 3$.

11. Să se calculeze sumele:

- i) $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 500$;
 ii) $S_2 = 2 + 4 + 6 + \dots + 2000$;
 iii) $S_3 = 3 + 4 + 5 + \dots + 98$;
 iv) $S_4 = 110 + 140 + 170 + \dots + 530$;
 v) $S_5 = 1 + 3 + 5 + \dots + 319$;
 vi) $S_3 = 530 + 500 + 470 + \dots + 110$

12. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

- i) $1 + 2 + 3 + \dots + x = 1275$;
 ii) $1 + 3 + 5 + \dots + x = 169$;
 iii) $1 + 7 + 13 + \dots + x = 280$;
 iv) $(x+1) + (x+4) + (x+7) + \dots + (x+28) = 155$;
 v) $(x+1) + (x+3) + (x+5) + \dots + (x+25) = 338$;
 vi) $1 + 5 + 9 + \dots + x = 1770$;

viii) $(3x-1)+(3x-4)+\dots+(3x-58)=790$.

prof. Ciofu Constantin