

Relațiile lui Viète

Dacă $f \in \mathbb{C}[x]$, $f = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ rădăcini ale lui f

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Dacă $f \in \mathbb{C}[x]$, $f = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

Dacă $f \in \mathbb{C}[x]$, $f = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $a \neq 0$, $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a} \\ x_1x_2x_3x_4 = -\frac{e}{a} \end{cases}$$

Formule utile :

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\ x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) \end{cases}$$

Ex: ①. Scrieți rădăcinile lui Viète pt pol $f \in \mathbb{C}[x]$, $f = 2x^2 - 3x + 1$.

$$\begin{matrix} a=2 \\ b=-3 \\ c=1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

② $f \in \mathbb{C}[x]$, $f = -x^3 + 2x^2 + 5x - 1$

$$\begin{matrix} a=-1 \\ b=2 \\ c=5 \\ d=-1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{-1} = 2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = \frac{5}{-1} = -5 \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{-1}{-1} = -1 \end{cases}$$

||

(19)

③ $f = 4x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 4x + 3 \quad f \in \mathbb{C}[x] \quad \text{Vite.}$

$$\begin{array}{l|l} a=4 \\ b=8 \\ c=16 \\ d=4 \\ e=3 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} = -\frac{8}{4} = -2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 = \frac{c}{a} = \frac{16}{4} = 4 \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a} = -\frac{4}{4} = -1 \\ x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

④ Fie $f = x^3 - 5x^2 + 3x + 1, \quad f \in \mathbb{C}[x].$
Aflați rădăcinile lui f știind că $x_1 + x_2 = 4$

Aplicăm relațiile lui Viète.

$$\begin{array}{l|l} a=1 \\ b=-5 \\ c=3 \\ d=1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{1} = 5 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = \frac{3}{1} = 3 \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = -\frac{1}{1} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (x_1 + x_2) + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{array} \Rightarrow 4 + x_3 = 5 \Rightarrow \boxed{x_3 = 1}$$

Revinem nel lui Viète, înlocuind $x_3 = 1$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1x_2 + x_1 + x_2 = 3 \\ x_1x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 4 - x_2 \\ (4 - x_2) \cdot x_2 = -1 \Rightarrow 4x_2 - x_2^2 = -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow -x_2^2 + 4x_2 + 1 = 0$$

$$\Delta = 16 + 4 = 20 = 4\sqrt{5} = 2\sqrt{5} \quad \begin{cases} x_2' = \frac{-4 - 2\sqrt{5}}{-2} = \frac{2(2 + \sqrt{5})}{2} = 2 + \sqrt{5} \\ x_2'' = 2 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Concluzie: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 - \sqrt{5} \\ x_3 = 2 + \sqrt{5} \end{cases}$

||

5) $f = x^3 - 5x^2 + 4x + 8, f \in \mathbb{C}[x]$. Calculati:

Vite.

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

b) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$

c) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$

$$\begin{matrix} a=1 \\ b=-5 \\ c=4 \\ d=8 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{1} = 5 \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4 \\ x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a} = -8 \end{cases}$$

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)$
 $= 5^2 - 2 \cdot 4 = 25 - 8 = 17$

b) x_1 -nod pt $f \Rightarrow x_1^3 - 5x_1^2 + 4x_1 + 8 = 0$

x_2 -nod pt $f \Rightarrow x_2^3 - 5x_2^2 + 4x_2 + 8 = 0$

x_3 -nod pt $f \Rightarrow x_3^3 - 5x_3^2 + 4x_3 + 8 = 0$

⊕ pe verticale

$$(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 5(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4(x_1 + x_2 + x_3) + 24 = 0$$

17 5

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 5 \cdot 17 - 4 \cdot 5 - 24$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 85 - 20 - 24 = 41$$

c) Inmultim rel. de la pct b cu x_1, x_2 , respectiv x_3 si obtinem

$$x_1^4 - 5x_1^3 + 4x_1^2 + 8x_1 = 0$$

$$x_2^4 - 5x_2^3 + 4x_2^2 + 8x_2 = 0$$

$$x_3^4 - 5x_3^3 + 4x_3^2 + 8x_3 = 0$$

⊕ pe verticale

$$(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) - 5(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 8(x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

41 17 5

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 205 - 68 - 40$$

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 97$$

||