

Relațiile lui Viete

i) Considerații teoretice

Fiind dată ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c, x \in \mathbb{R}$ între rădăcinile x_1 și x_2 și coeficienții a, b, c există relațiile lui Viete:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

Formule utile:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2;$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2);$$

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2}$$

ii) Exerciții rezolvate

1. Fără a rezolva ecuația $x^2 - 3x - 2 = 0$ să se calculeze:

- i) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; ii) $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2}$; iii) $x_1^2 + x_2^2$; iv) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; v) $x_1^3 + x_2^3$; vi) $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$; vii) $x_1^4 + x_2^4$; viii) $|x_1 - x_2|$.

Rezolvare.

Aplicăm relațiile lui Viete pentru ecuația din enunț $a=1, b=-3, c=-2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-(-3)}{1} = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -2 \end{cases}$

i) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2};$

ii) $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} = \frac{1+x_2+1+x_1}{(1+x_1)(1+x_2)} = \frac{x_1+x_2+2}{1+x_1x_2+x_1+x_2} = \frac{3+2}{1-2+3} = \frac{5}{2};$

iii) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 3^2 - 2 \cdot (-2) = 13;$

iv) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2}{x_1x_2} = \frac{13}{-2} = -\frac{13}{2};$

v) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 3^3 - 3 \cdot (-2) \cdot 3 = 27 + 18 = 45;$

vi) $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)}{(x_1x_2)^2} = \frac{45}{4};$

vii) Pentru a calcula $x_1^4 + x_2^4$ se procedează după cum urmează:

x_1 - soluție $\Rightarrow x_1^2 - 3x_1 - 2 = 0 \mid \cdot x_1^2 \Rightarrow x_1^4 - 3x_1^3 - 2x_1^2 = 0$

x_2 - soluție $\Rightarrow x_2^2 - 3x_2 - 2 = 0 \mid \cdot x_2^2 \Rightarrow x_2^4 - 3x_2^3 - 2x_2^2 = 0$

Adunând cele două relații se obține:

$$x_1^4 + x_2^4 - 3(x_1^3 + x_2^3) - 2(x_1^2 + x_2^2) = 0 \Rightarrow x_1^4 + x_2^4 - 3 \cdot 45 - 2 \cdot 13 = 0 \Rightarrow x_1^4 + x_2^4 = 161$$

viii) $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2} = \sqrt{13 + 4} = \sqrt{17}.$

2. Fie ecuația $2x^2 - x - 3 = 0$ și x_1, x_2 soluțiile acesteia. Să se formeze ecuația de gradul al doilea în y , știind că:

i) $y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2}, y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}$;

ii) $y_1 = \frac{x_1}{x_2}, y_2 = \frac{x_2}{x_1}$.

Rezolvare.

Vom folosi formula $y^2 - Sy + P = 0, S = y_1 + y_2, P = y_1 \cdot y_2$

$$a = 2, b = -1, c = -3 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-(-1)}{2} = \frac{1}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

i) $S = y_1 + y_2 = x_1 + \frac{1}{x_2} + x_2 + \frac{1}{x_1} = x_1 + x_2 + \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$;

$$S = y_1 \cdot y_2 = \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right) \cdot \left(x_2 + \frac{1}{x_1}\right) = x_1 x_2 + 1 + 1 + \frac{1}{x_1 x_2} = -\frac{3}{2} + 2 - \frac{2}{3} = \frac{-9 + 12 - 4}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$y^2 - Sy + P = 0 \Rightarrow y^2 - \frac{1}{6}y - \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow 6y^2 - y - 1 = 0$$

ii) $S = y_1 + y_2 = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2}{x_1 x_2} = \frac{\frac{1}{4} + 3}{-\frac{3}{2}} = \frac{13}{4} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{13}{6}$

$$S = y_1 \cdot y_2 = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_1} = 1, y^2 - Sy + P = 0 \Rightarrow y^2 - \frac{13}{6}y + 1 = 0 \Rightarrow 6y^2 - 13y + 6 = 0.$$

3. Să se determine parametrul real m pentru care între rădăcinile ecuației $x^2 - (m-1)x + 2 - m = 0$

există relația $2(x_1 + x_2) - 3x_1 x_2 = \frac{1}{2}$.

Rezolvare.

$$x^2 - (m-1)x + 2 - m = 0$$

$$a = 2, b = -(m-1), c = 2 - m \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{m-1}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2-m}{2} \end{cases}$$

$$2(x_1 + x_2) - 3x_1 x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \cdot \frac{m-1}{2} - 3 \cdot \frac{2-m}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2m-2}{2} - \frac{6-3m}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2m - 2 - 6 + 3m = 1 \Rightarrow 5m = 9 \Rightarrow m = \frac{9}{5}.$$

iii) Exerciții propuse

1. Să se arate că următoarele ecuații au rădăcini reale, apoi să se scrie pentru fiecare relațiile lui Viete:

i) $x^2 + 2x - 1 = 0$;

ii) $-5x^2 + x + 1 = 0$;

iii) $5x^2 - x - 4 = 0$;

iv) $2x^2 - 5x = 0$;

v) $-4x^2 + 3x = 0$;

vi) $x^2 - 5 = 0$;

- vii) $-x^2 + 4 = 0$;
- viii) $2x^2 - 9 = 0$;
2. Știind că ecuațiile următoare au rădăcini reale, să se determine rădăcina x_2 când se cunoaște rădăcina
- i) $x^2 - 25x + 24 = 0$; $x_1 = 24$;
- ii) $-4x^2 + x + 3 = 0$; $x_1 = 1$;
- iii) $5x^2 - 6x + 1 = 0$; $x_1 = \frac{1}{5}$;
- iv) $x^2 - 17x - 18 = 0$; $x_1 = 18$;
- v) $6x^2 - 7x = 0$; $x_1 = 0$;
3. Determinați câte o rădăcină x_1 pentru fiecare din ecuațiile următoare, apoi, utilizând una din relațiile lui Viète, determinați și rădăcina x_2 :
- i) $2x^2 - x - 1 = 0$;
- ii) $-2x^2 + 3x - 1 = 0$;
- iii) $-4x^2 + 3x + 1 = 0$;
- iv) $x^2 - 4 = 0$;
- v) $7x^2 + 8x + 1 = 0$;
4. Fie ecuația $3x^2 - x - 2 = 0$, cu rădăcinile x_1 și x_2 . Să se calculeze în două moduri:
- i) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$;
- ii) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$;
- iii) $\frac{x_1 + 1}{x_2 + 2} + \frac{x_2 + 1}{x_1 + 2}$.
5. Fie ecuația $x^2 - 2x - 1 = 0$, cu rădăcinile x_1 și x_2 . Să se calculeze în două moduri:
- i) $x_1^2 + x_2^2$;
- ii) $x_1^3 + x_2^3$;
- iii) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} - 2$.
6. Fie ecuația $x^2 - 2x - 10 = 0$, cu rădăcinile x_1 și x_2 . Să se calculeze:
- i) $2(x_1 + x_2) - 3$;
- ii) $x_1 + x_2 - x_1x_2$;
- iii) $5(x_1 + x_2) + x_1x_2$;
- iv) $x_1^2 + x_2^2$;
- v) $\frac{2x_2}{x_1} + \frac{2x_1}{x_2}$;
- vi) $x_1^3 + x_2^3$.