

ȘIRURI MĂRGINITE

i) Considerații teoretice

Un șir de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ se numește **mărginit inferior** dacă:

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } \alpha \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Observații:

a) α este minorant pentru toți termenii șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

b) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ **nu este mărginit inferior** dacă:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists \text{ cel puțin un termen din } (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ a.î. } \alpha > x_n$$

Un șir de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ se numește **mărginit superior** dacă:

$$\exists \beta \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } x_n \leq \beta, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Observații:

a) β este majorant pentru toți termenii șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

b) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ **nu este mărginit superior** dacă:

$$\forall \beta \in \mathbb{R}, \exists \text{ cel puțin un termen din } (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ a.î. } x_n > \beta$$

1. Un șir de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ se numește **șir mărginit** dacă:

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ a.î. } \alpha \leq x_n \leq \beta, \forall n \in \mathbb{N}$$

2. Un șir de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ se numește **șir mărginit** dacă:

$$\exists M > 0 \text{ a.î. } |x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Un șir care nu este mărginit se numește nemărginit.

ii) Exerciții rezolvate

1. Studiați mărginirea următoarelor șiruri de numere reale:

i) $x_n = \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N};$

ii) $x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*;$

iii) $x_n = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}^*;$

iv) $x_n = 1 + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*;$

v) $x_n = \frac{n + (-1)^n}{n+1}, n \in \mathbb{N}^*;$

vi) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}^*$;

vii) $x_n = \frac{2 \cdot 3^n + 4^n}{3 \cdot 4^n + 5^n}, n \in \mathbb{N}$.

Rezolvare:

i) $\exists M = \frac{1}{2} > 0$ a.î $|x_n| = \left| \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ mărginit;

ii) $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow x_n \in (0; 1] \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ mărginit;

iii) $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{n}{n+1} > 0$
 $n < n+1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} < 1 \Rightarrow x_n \in (0; 1) \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ mărginit;

iv) $n = 2k \Rightarrow x_{2k} = 1 + (-1)^{2k} = 1 + 1 = 2$
 $n = 2k+1 \Rightarrow x_{2k+1} = 1 + (-1)^{2k+1} = 1 - 1 = 0 \Rightarrow x_n \in [0; 2] \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ mărginit;

v) $|x_n| = \left| \frac{n + (-1)^n}{n+1} \right| = \frac{|n + (-1)^n|}{|n+1|} = \frac{|n + (-1)^n|}{n+1} \leq \frac{|n| + |(-1)^n|}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} = 1, \exists M = 1 > 0$

astfel încât $|x_n| \leq 1 \Rightarrow x_n \in [-1; 1] \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ mărginit;

vi) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \geq 1 \Rightarrow \sqrt{n} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$
 $\sqrt{n} < \sqrt{n+1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$

$x_n \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ mărginit;

vii) $3^n < 4^n \cdot 2 \Rightarrow 2 \cdot 3^n < 2 \cdot 4^n \Rightarrow 2 \cdot 3^n + 4^n < 2 \cdot 4^n + 4^n = 3 \cdot 4^n$

$4^n < 5^n \Rightarrow 3 \cdot 4^n < 3 \cdot 4^n + 4^n < 3 \cdot 4^n + 5^n \Rightarrow 4 \cdot 4^n < 3 \cdot 4^n + 5^n \Rightarrow \frac{1}{3 \cdot 4^n + 5^n} < \frac{1}{4 \cdot 4^n}$

Prin urmare, $x_n = \frac{2 \cdot 3^n + 4^n}{3 \cdot 4^n + 5^n} < \frac{3 \cdot 4^n}{4 \cdot 4^n} = \frac{3}{4} \Rightarrow x_n \in \left(0; \frac{3}{4}\right) \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ mărginit;

2. Să se arate că şirul $x_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n}, n \in \mathbb{N}^*$ este mărginit.

Rezolvare:

$n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_n > 0$ (1)

$$n^2 + 1 \leq n^2 + 1 \Rightarrow \frac{1}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{n^2 + 1}$$

$$n^2 + 1 < n^2 + 2 \Rightarrow \frac{1}{n^2 + 2} < \frac{1}{n^2 + 1}$$

.....

$$n^2 + 1 < n^2 + n \Rightarrow \frac{1}{n^2 + n} < \frac{1}{n^2 + 1}$$

Adunând pe coloane, obținem:

$$\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n} < \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 1} + \dots + \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{n}{n^2 + 1}$$

$$n < n^2 \Rightarrow n < n^2 + 1 \Rightarrow \frac{n}{n^2 + 1} < 1 \Rightarrow x_n < 1 \quad (2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow x_n \in (0; 1) \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ mărginit.

3. Să se arate că șirul $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}, n \in \mathbb{N}^*$ este mărginit.

Rezolvare:

$$n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_n > 0 \quad (1)$$

$$2 \leq 2! \Rightarrow \frac{1}{2!} \leq \frac{1}{2}$$

$$2^2 \leq 3! \Rightarrow \frac{1}{3!} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$2^3 \leq 4! \Rightarrow \frac{1}{4!} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

.....

$$2^{n-1} \leq n! \Rightarrow \frac{1}{n!} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{Adunând pe coloană, obținem: } \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{Folosim } a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = a(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}) = a \cdot \frac{1 - a^n}{1 - a}$$

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} ; x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} = 2 + \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) <$$

$$< 2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3 \quad (2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow x_n \in (0; 3) \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ mărginit.

4. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin $x_0 = 0, x_n - x_{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n, n \in \mathbb{N}^*$ este mărginit.

Rezolvare:

$$n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_n > 0 \quad (1)$$

Dăm valori lui n de la 1 la k

$$n = 1 \Rightarrow x_1 - x_0 = \frac{1}{3}$$

$$n = 2 \Rightarrow x_2 - x_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$n = 3 \Rightarrow x_3 - x_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

.....

$$n = k - 1 \Rightarrow x_{k-1} - x_{k-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

$$n = k \Rightarrow x_k - x_{k-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Adunând pe verticală, obținem:

$$x_k - x_0 = \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k\right] = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k\right] < \frac{1}{2}$$

$$(2). \text{ Din (1) și (2) } \Rightarrow x_n \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ mărginit.}$$

5. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit recursiv prin $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, x_1 = \sqrt{2}$ este mărginit.

Rezolvare:

$$n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_n > 0$$

$$x_2 = \sqrt{2 + x_1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2} \Rightarrow x_2 > x_1$$

$$2 + \sqrt{2} > 2$$

Se demonstrează prin metoda inducției matematice că $\Rightarrow x_n < x_{n+1}, n \in \mathbb{N}^*$

$$x_n < x_{n+1} \Rightarrow x_n < \sqrt{2+x_n} \uparrow^2 \Rightarrow x_n^2 < 2+x_n \Rightarrow x_n^2 - x_n - 2 < 0$$

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x - 2, x^2 - x - 2 < 0,$

$$\Delta = 9, x_1 = -1, x_2 = 2 \Rightarrow x \in (-1, 2)$$

Cum $x_n \geq \sqrt{2} \Rightarrow x_n \in [\sqrt{2}; 2) \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ mărginit.

6. Să se arate că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit recursiv prin $x_n = (\sqrt{2})^{x_{n-1}}, x_1 = \sqrt{2}, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ este mărginit.

Rezolvare:

$$\sqrt{2} > 0 \Rightarrow x_n > 0$$

$$x_2 = (\sqrt{2})^{x_1} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} < \sqrt{2}^2 = 2 \Rightarrow x_2 < 2$$

Presupunem $P(n): x_n < 2, n \in \mathbb{N}^*$

I. E.V. $n=1 \Rightarrow x_1 < 2 \Leftrightarrow \sqrt{2} < 2$ (A)

II. E.D. Presupunem $P(k): x_k < 2$

Demonstrăm $P(k+1): x_{k+1} < 2$

$$x_{k+1} < 2 \Leftrightarrow (\sqrt{2})^{x_k} < 2 \Leftrightarrow \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{x_k} < 2 \Leftrightarrow 2^{\frac{x_k}{2}} < 2 \Leftrightarrow \frac{x_k}{2} < 1 \Leftrightarrow x_k < 2 \text{ (A)}$$

Din I și II rezultă că $x_n < 2, n \in \mathbb{N}^*$ (2)

Din relațiile (1) și (2) $x_n \in (0; 2) \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ mărginit.

7. Să se arate că șirul $x_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}, n \in \mathbb{N}^*$ este mărginit.

Rezolvare:

$$n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_n > 0 \text{ (1)}$$

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{(k+2) - k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^n \frac{k+2}{k(k+1)(k+2)} - \sum_{k=1}^n \frac{k}{k(k+1)(k+2)} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right) - \right. \end{aligned}$$

$$-\left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)}\right) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} \right] < \frac{1}{4} \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) $x_n \in \left(0; \frac{1}{4}\right) \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ mărginit.

8. Arătați că următoarele șiruri de numere sunt mărginite:

i) $x_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), n \in \mathbb{N}^* ;$

ii) $x_n = \prod_{k=1}^n \frac{k^2 - 2}{k^2 + 2k}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 ;$

iii) $x_n = \prod_{k=2}^n \frac{k^2 + k}{k^2 + k - 2}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 .$

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \text{i) } x_n &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \left(\frac{2^2 - 1}{2^2}\right) \cdot \left(\frac{3^2 - 1}{3^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right) = \\ x_n &= \frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n}}_I \cdot \underbrace{\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n}}_{II} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

$$x_n = \frac{n+1}{2n}, \text{ Cum } n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \geq 1 \Rightarrow n+1 \leq n+n \Rightarrow n+1 \leq 2n \mid 2n \Rightarrow \frac{n+1}{2n} \leq 1 \Rightarrow x_n \leq 1$$

$$x_n = \frac{n+1}{2n} = \frac{n}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2} \Rightarrow x_n \in \left(\frac{1}{2}; 1\right].$$

ii) $\frac{k^2 - 2}{k^2 + 2k} = \frac{k^2 - 2}{k(k+2)} < \frac{k^2}{k(k+2)} = \frac{k}{k+2} < 1 \Rightarrow x_n < 1$

$$\text{Cum } \left. \begin{array}{l} k \geq 2 \Rightarrow k^2 - 2 > 0 \\ k^2 + 2k > 0 \end{array} \right| \Rightarrow \frac{k^2 - 2}{k^2 + 2k} > 0 \Rightarrow x_n > 0 \Rightarrow x_n \in (0; 1) <$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } \frac{k^2 + k}{k^2 + k - 2} &= \frac{k(k+1)}{(k-1)(k+2)} \Rightarrow \prod_{k=2}^n \frac{k^2 + k}{k^2 + k - 2} = \left(\prod_{k=2}^n \frac{k}{k-1}\right) \cdot \left(\prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k+2}\right) = \\ &= \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n-1}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n+2}\right) = \frac{3n}{n+2} \\ \frac{3n}{n+2} &= \frac{3n+6-6}{n+2} = \frac{3(n+2)-6}{n+2} = \frac{3(\cancel{n+2})}{\cancel{n+2}} - \frac{6}{n+2} = 3 - \frac{6}{n+2} < 3 \Rightarrow x_n < 3 \end{aligned}$$

$$k = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow x_n \geq \frac{3}{2} \Rightarrow x_n \in \left[\frac{3}{2}; 3 \right).$$

9. Să se arate că următoarele șiruri sunt nemărginite:

i) $x_n = n, n \in \mathbb{N}^*$;

ii) $x_n = 3n^2 + 1, n \in \mathbb{N}^*$;

iii) $x_n = -5n^2, n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare:

i) (x_n) - mărginit dacă $\exists M > 0$ a.î $|x_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Presupunem că $\exists M > 0$ a.î $n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Pentru că avem $\forall n \in \mathbb{N}^*$ luăm $n = [M] + 1 > M \Rightarrow (x_n)$ este nemărginit.

ii) $x_1 = 4, x_2 = 13, x_3 = 28, \dots \Rightarrow$ observăm că termenii par să fie în ordine crescătoare

(x_n) - **nemărginit superior** dacă $\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ a.î } x_n > \alpha}$ (adică, oricât de mare ar fi α , găsim un termen al șirului mai mare decât α)

Luăm un număr arbitrar $\alpha \in \mathbb{R}$

$$x_n = 3n^2 + 1 > 3n^2 > n^2 \geq n > \alpha \quad \left| \Rightarrow x_{[\alpha]+1} > \alpha \Rightarrow (x_n) \text{ - nemărginit superior} \right.$$

iii) $x_1 = -5, x_2 = -20, x_3 = -45, \dots \Rightarrow$ observăm că termenii par să fie în ordine descrescătoare

(x_n) - **nemărginit inferior** dacă $\boxed{\forall \beta \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ a.î } \beta > x_n}$ (adică, oricât de mic ar fi β , găsim un termen al șirului mai mic decât β)

Luăm un număr arbitrar $\beta \in \mathbb{R}$

$$x_n = -5n^2 < -n^2 \leq -n < \beta \Rightarrow n > -\beta \quad \left| \Rightarrow \beta > x_{[-\beta]+1} \Rightarrow (x_n) \text{ - nemărginit inferior;} \right.$$

iii) Exerciții propuse

1. Studiați mărginirea următoarelor șiruri de numere reale:

i) $x_n = \frac{1}{5}, n \in \mathbb{N}$;

ii) $x_n = \frac{2}{n+1}, n \in \mathbb{N}^*$;

iii) $x_n = \frac{n+1}{2n+3}, n \in \mathbb{N}^*$;

iv) $x_n = 2 + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*$;

$$\text{v)} \ x_n = \frac{2n + (-1)^n}{3n + 5}, n \in \mathbb{N}^*;$$

$$\text{vi)} \ x_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}, n \in \mathbb{N}^*;$$

$$\text{vii)} \ x_n = \frac{3 \cdot 5^n + 6^n}{4 \cdot 6^n + 7^n}, n \in \mathbb{N}.$$

Indicații:

$$\text{i)} \ M = \frac{1}{5} > 0; \text{ ii)} \ 0 < x_n \leq 1; \text{ iii)} \ 0 < x_n < \frac{1}{2}; \text{ iv)} \ 1 \leq x_n \leq 3; \text{ v)} \ 0 < x_n < \frac{2}{3}; \text{ vi)}$$

$$0 < x_n \leq \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}; \text{ vii)} \ 0 < x_n < 4.$$

2. Să se arate că următoarele șiruri de numere reale sunt mărginite:

$$\text{i)} \ x_n = \frac{2n^2}{3n^2 + n}, n \in \mathbb{N}^*;$$

$$\text{ii)} \ x_n = \frac{2^n - 3^n}{6^n}, n \in \mathbb{N};$$

$$\text{iii)} \ x_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}, n \in \mathbb{N};$$

$$\text{iv)} \ x_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}, n \in \mathbb{N};$$

$$\text{v)} \ x_n = n - \sqrt[3]{n^3 + 1}, n \in \mathbb{N}^*.$$

Indicații:

$$\text{i)} \ x_n = \frac{2}{3 + \frac{1}{n}}; n \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow 3 < 3 + \frac{1}{n} \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3 + \frac{1}{n}} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x_n < \frac{2}{3};$$

$$\text{ii)} \ x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n; \text{ Cum } \frac{1}{3} < \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow x_n \leq 0, x_0 = 0, x_1 = -\frac{1}{6}, x_2 = -\frac{5}{36}$$

$$\Rightarrow x_n \geq -\frac{1}{6} \Rightarrow x_n \in \left[-\frac{1}{6}; 0\right];$$

$$\text{iii)} \ 0 < x_n \leq 1; \text{ iv)} \ x_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n} + \sqrt{n}}, n + \sqrt{n} > n \Rightarrow \sqrt{n} + \sqrt{n} > \sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} + \sqrt{n} + \sqrt{n} > \sqrt{n} + \sqrt{n} = 2\sqrt{n} \Rightarrow \left(\sqrt{n} + \sqrt{n} + \sqrt{n}\right) > 2\sqrt{n} \Rightarrow x_n < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < x_n < \frac{1}{2};$$

$$\text{v)} \ x_n = \frac{-1}{n^2 + n\sqrt[3]{n^3 + 1} + \sqrt[3]{(n^3 + 1)^2}}, -1 < x_n < 0.$$

3. Demonstrați că următoarele șiruri sunt mărginite:

$$\text{i)} \ x_n = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{2n^3 + 3n^2 + 2n}, n \geq 1;$$

$$\text{ii) } x_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}, n \geq 1;$$

$$\text{iii) } x_n = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2n}}, n \geq 1;$$

$$\text{iv) } x_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}, n \geq 1;$$

$$\text{v) } x_n = \frac{5}{1+2^2} + \frac{5}{1+2^3} + \dots + \frac{5}{1+2^n}, n \geq 1.$$

Indicații:

$$\text{i) } x_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6(2n^2+3n+2)}, (n+1)(2n+1) < 2(n+1)^2, 2n^2+3n+2 > 2n^2 \Rightarrow x_n < \frac{2(n+1)^2}{12n^2}$$

$$\Rightarrow x_n < \frac{1}{6} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 < \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x_n \in \left(0; \frac{2}{3} \right];$$

$$\text{ii) } x_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) < \frac{1}{2} \Rightarrow x_n \in \left(0; \frac{1}{2} \right); \text{ iii) } x_n = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \dots + \frac{1}{9^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{9} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{9}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_n \in \left(1; \frac{9}{8} \right); \text{ iv) } 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k \geq 1 \cdot 2 \cdot \underbrace{2 \cdot \dots \cdot 2}_{k-2 \text{ ori}} = 2^{k-1} \Rightarrow \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} \leq \frac{1}{2^{k-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 \cdot 2} \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \leq \frac{1}{2^2}, \dots \Rightarrow x_n \leq 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{< 1} < 2 \Rightarrow x_n \in (1; 2);$$

$$\text{v) } 1 + 2^k > 2^k \Rightarrow \frac{1}{1+2^k} < \frac{1}{2^k} \Rightarrow \frac{5}{1+2^k} < \frac{5}{2^k}, \text{ dăm valori de la 1 la } n \text{ și obținem:}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{5}{1+2^2} < \frac{5}{2^2} \\ \frac{5}{1+2^3} < \frac{5}{2^3} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{5}{1+2^n} < \frac{5}{2^n} \end{array} \right| \Rightarrow x_n < \frac{5}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{5}{2^n} = \frac{5}{2^2} \left[\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2}}_{< 2} \right] = \frac{5}{2} \Rightarrow x_n \in \left(0; \frac{5}{2} \right)$$