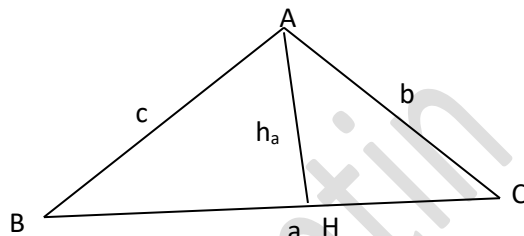


Teorema sinusurilor

i) Considerații teoretice

Fie triunghiul $\triangle ABC$, cu notațiile consacrate:

- $BC = a, AC = b, AB = c$,
- $m(A) = A$,
- $h_a = AH (AH \perp BC)$
- $p = \frac{a+b+c}{2}$,
- S este aria $\triangle ABC$;
- R – raza cercului circumscris triunghiului,
- r – raza cercului înscris triunghiului.



Teorema sinusurilor:
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

ii) Exerciții rezolvate

1. În triunghiul ABC se cunosc $AB = 4 \text{ cm}$ și $m(C) = 30^\circ$. Să se determine raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Rezolvare:

Aplicăm teorema sinusurilor:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{4}{\sin 30^\circ} = 2R \Rightarrow \frac{4}{\frac{1}{2}} = 2R \Rightarrow 4 \cdot \frac{2}{1} = 2R \Rightarrow 2R = 8 \Rightarrow R = 4 \text{ cm}$$

2. În triunghiul ABC se cunosc $AC = 5\sqrt{2} \text{ cm}$ și $R = 5 \text{ cm}$. Să se determine $m(B)$ a triunghiului ABC.

Rezolvare:

Aplicăm teorema sinusurilor:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{AC}{\sin B} = 2R \Rightarrow \frac{5\sqrt{2}}{\sin B} = 2 \cdot 5 \Rightarrow \frac{5\sqrt{2}}{\sin B} = 10 \Rightarrow 10 \sin B = 5\sqrt{2} \Rightarrow \sin B = \frac{5\sqrt{2}}{10} \Rightarrow \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow B = 45^\circ.$$

3. În triunghiul ABC se cunosc $m(A) = 60^\circ$ și $R = 6 \text{ cm}$. Să se determine lungimea segmentului BC a triunghiului ABC.

Rezolvare:

Aplicăm teorema sinusurilor:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2 \cdot 6\sqrt{3} \Rightarrow \frac{BC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 \cdot 6\sqrt{3} \Rightarrow BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cdot 6\sqrt{3} \Rightarrow BC = 18 \text{ cm}.$$

4. Triunghiul ascuțitunghic ABC are $BC = 2\sqrt{3}$ și raza cercului circumscris $R = \frac{2}{3}$. Să se determine $\sin A$.

Rezolvare:

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{\sin A} = 2 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{\sin A} = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin A = \frac{6\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin A = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

5. În triunghiul ABC se cunosc $AB = 8$ cm și $\cos C = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ și $R = 6$ cm. Să se determine raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Rezolvare:

Aplicăm formula fundamentală a trigonometriei

$$\sin^2 C + \cos^2 C = 1 \Rightarrow \sin^2 C + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 C + \frac{8}{9} = 1 \Rightarrow \sin^2 C = 1 - \frac{8}{9} \Rightarrow \sin^2 C = \frac{1}{9} \Rightarrow \sin C = \pm \frac{1}{3}$$

Cum funcția sinus este pozitivă în intervalul $(0; \pi) \Rightarrow \sin C = \frac{1}{3}$

Aplicăm teorema sinusurilor:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{8}{\frac{1}{3}} = 2R \Rightarrow 2R = 24 \Rightarrow R = 12 \text{ cm}.$$

6. În $\triangle ABC$ se cunosc $AC = 12$ și $\cos B = \frac{3}{5}$. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris $\triangle ABC$.

Rezolvare:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{AC}{\sin B} = 2R.$$

Aplicând formula fundamentală a trigonometriei, obținem:

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1 \Rightarrow \sin^2 B + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 B = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow \sin^2 B = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin B = \frac{4}{5}$$

$$\frac{AC}{\sin B} = 2R \Rightarrow \frac{12}{\frac{4}{5}} = 2R \Rightarrow 2R = 15 \Rightarrow R = \frac{15}{2}.$$

7. Se consideră $\triangle ABC$ în care se cunosc $AB = 6$ cm, $m(A) = 45^\circ$ și $m(B) = 60^\circ$. Să se determine:

- i) Perimetrul triunghiului ABC;
- ii) Raza cercului circumscris $\triangle ABC$.

Rezolvare:

i) $P = AB + AC + CB$

$$\text{Aplicăm teorema sinusurilor: } \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} = 2R$$

$$A + B + C = 180^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$$

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow \frac{6}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow AC = \frac{6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} \Rightarrow AC = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = 3\sqrt{3}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow AC = 3\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1)$$

$$\frac{6}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} = \frac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow BC = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} \Rightarrow BC = 3\sqrt{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \Rightarrow BC = 6(\sqrt{3} - 1)$$

$$P = AB + AC + CB = 6 + 3\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1) + 6(\sqrt{3} - 1) = 6 + 9\sqrt{2} + 3\sqrt{6} + 6\sqrt{3} - 6 \Rightarrow$$

$$P = 3(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}).$$

$$\text{ii) } \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{6}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = 2R \Rightarrow R = \frac{12}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{12(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4} \Rightarrow R = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

iii) Exerciții propuse

1. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului $\triangle ABC$, știind că $AC = 4$ și $m(\angle ABC) = 30^\circ$.
2. Știind că raza cercului circumscris triunghiului oarecare $\triangle ABC$ este $4\sqrt{2}$ iar măsura unghiului A este de 45° să se calculeze lungimea segmentului BC .
3. Dacă raza cercului circumscris triunghiului $\triangle ABC$ este $\frac{5}{2}$, iar $AB = 5$ atunci să se calculeze $\sin A$.
4. Să se calculeze lungimile laturilor AB și AC ale $\triangle ABC$ știind că $AB + AC = 6 + 6\sqrt{2}$, $m(\angle C) = 30^\circ$ și $m(\angle B) = 45^\circ$.
5. Să se calculeze lungimile laturilor AB și AC ale $\triangle ABC$ știind că $AB + AC = 3 + \sqrt{3}$, $BC = \sqrt{6}$ și $m(\angle A) = 60^\circ$.
6. Să se arate că în orice $\triangle ABC$ de laturi a, b, c și de unghiuri A, B și C are loc egalitatea:

$$\frac{\sin A}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$
7. Se consideră $\triangle ABC$, înscris în cercul de centru O și rază 2 . Să se determine lungimile laturilor triunghiului $\triangle ABC$ știind că $m(\angle A) = 30^\circ$ și $m(\angle B) = 120^\circ$.
8. Să se arate că dacă într-un triunghi $\triangle ABC$ este adevărată relația $\frac{\sin^2 A}{\cos A} = \frac{a^2}{bc}$ atunci triunghiul ABC este dreptunghic.

Indicații.

$$a = 2R \sin A \Rightarrow \cos A = \sin B \sin C; \text{ cum } A + B + C = \pi \Rightarrow A = \pi - (B + C) \text{ etc.}$$

9. Dacă în triunghiul $\triangle ABC$ este adevărată egalitatea $a = 2b \cos C$ atunci $\triangle ABC$ este isoscel.

Indicații.

$$a = 2R \sin A, b = 2R \sin B \Rightarrow \sin A = 2 \sin B \cos C; A = \pi - (B + C) \text{ etc.}$$