

Divizibilitate

- ① $\overline{ab} : 2 \Leftrightarrow b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$
- ② $\overline{ab} : 3 \Leftrightarrow (a+b) : 3$
- ③ $\overline{abc} : 4 \Leftrightarrow \overline{bc} : 4$
- ④ $\overline{ab} : 5 \Leftrightarrow b \in \{0, 5\}$
- ⑤ $\overline{ab} : 9 \Leftrightarrow (a+b) : 9$

Exerciții:

① $x = ?$ pt care $\overline{2x374} : 9$

$$\overline{2x374} : 9 \Leftrightarrow (2+x+3+7+4) : 9 \Leftrightarrow (x+16) : 9 \Rightarrow x \in \{2\} \Rightarrow 22374.$$

② Determinați cel mai mare număr de forma $\overline{132x4}$: cu 3, și cu 4.

$$\overline{132x4} : 4 \Rightarrow \overline{x4} : 4 \Rightarrow x \in \{0, 2, 4, 6, 8\}.$$

$$\overline{132x4} : 3 \Rightarrow (1+3+2+x+4) : 3 \Rightarrow (x+10) : 3 \Rightarrow x \in \{2, 8\}$$

Rezultate: $13224, \underline{13284}$

③ Fie nr $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2024 + 30$. Analizați că :

a) $a : 2$ b) $a : 3$ c) $a : 15$

④ Demonstrați că :

a) $11 \mid (2^{2025} + 2^{2024} - 2^{2022})$

b) $90 \mid (15^{2m+1} - 5^{2m} \cdot 9^{m+1})$

$$\xrightarrow{\quad} 3 \cdot 3^{2m-1} \cdot 5 \cdot 5^{2m-1} \cdot 2$$

⑤ Dacă $11 \mid (2x+5y+4z)$ și $11 \mid (3x+2y+5z)$ atunci $11 \mid z$.

$$11 \mid (2x+5y+4z) \mid 3 \Leftrightarrow 11 \mid 6x+15y+12z$$

$$11 \mid (3x+2y+5z) \mid 2 \Leftrightarrow 11 \mid 6x+4y+10z$$

$$\hline \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 11 \mid 11y + 2z \\ 11 \mid 11y \end{array} \right\} \Rightarrow 11 \mid 2z \quad (11, 2) = 1 \Rightarrow 11 \mid z$$

⑥ $x = ?$ pt care $x+2 \mid x+5, x \in \mathbb{N}$.

$$\left. \begin{array}{l} (x+2) \mid (x+5) \\ (x+2) \mid (x+2) \end{array} \right| \Rightarrow (x+2) \mid 3 \Rightarrow x+2 \in \Delta_3 = \{1, 3\} \begin{cases} x+2=1 \quad \text{F} \\ x+2=3 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

⑦ $x = ?$ pt care $x+2 \mid 5x+12, x \in \mathbb{N}$

$$\left. \begin{array}{l} (x+2) \mid 5x+12 \\ x+2 \mid x+2 \end{array} \right| \cdot 5 \Rightarrow \begin{array}{r} x+2 \mid 5x+12 \\ \underline{x+2 \mid 5x+10} \\ 2 \end{array} \Rightarrow (x+2) \mid 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+2) \in \Delta_2 = \{1, 2\} \Rightarrow \begin{cases} x+2=1 \quad \text{F} \\ x+2=2 \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

Numere prime:

$(a, b) = 1 \Rightarrow 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots$ o infinitate.

"1" - nu este nr prim.

① Verificati dacă 5 și 9 sunt prime între ele.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_5 = \{1, 5\} \\ \Delta_9 = \{1, 3, 9\} \end{array} \right| \Rightarrow (5, 9) = 1 \Rightarrow 5 \text{ și } 9 \text{ prime între ele}$$

② 16 și 188 sunt prime între ele?

$$\left. \begin{array}{l} 16 = 2^4 \\ 188 = 2^2 \cdot 47 \end{array} \right| \Rightarrow (16, 188) = 2^2 = 4 \Rightarrow (16, 188) \neq 1 \Rightarrow 16 \text{ și } 188 \text{ nu sunt prime între ele.}$$

③ $a, b = ?$, $a, b \in \mathbb{N}^+$ dacă $(a, b) = 15$ și $a+b = 180$.

$$\begin{aligned} (a, b) = 15 &\Rightarrow a:15 \Rightarrow a = 15x \\ &b:15 \Rightarrow b = 15y \end{aligned} \quad \text{unde } (x, y) = 1, x, y \in \mathbb{N}^+$$

$$a+b=180 \Rightarrow 15x+15y=180 \Rightarrow 15(x+y)=180 \Rightarrow x+y=12$$

$$\begin{aligned} \text{Deci } \left. \begin{array}{l} x+y=12 \\ (x, y)=1 \end{array} \right| \Rightarrow & \begin{array}{ll} x=1, y=11 & \Rightarrow a=15, y=165 \\ x=5, y=7 & \Rightarrow a=75, y=105 \\ x=7, y=5 & \Rightarrow a=105, y=75 \\ x=11, y=1 & \Rightarrow a=165, b=15 \end{array} \end{aligned}$$

||

(4) Arătați că $(2m+1; 3m+2)=1$ $m \in \mathbb{N}$.

Fie $d = (2m+1; 3m+2)$, $d \neq 0$, $d \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{array}{l} d \mid 2m+1 \quad / \cdot 3 \\ d \mid 3m+2 \quad / \cdot 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} d \mid 6m+3 \\ d \mid 6m+4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} d \mid 1 \\ d \in \mathbb{N}^* \end{array} \Rightarrow d=1$$

(5) 146, 160 și 195 împărțite la același nr natural $\Rightarrow$ resturile 12, 10 și 15. Aflați nr.

$$\begin{array}{l} 146 : m = r_1, r=12 \Rightarrow 146 = m \cdot r_1 + 12 \Rightarrow 134 = m r_1 \Rightarrow m \mid 134 \\ 160 : m = r_2, r=10 \Rightarrow 160 = m \cdot r_2 + 10 \Rightarrow 150 = m r_2 \Rightarrow m \mid 150 \\ 195 : m = r_3, r=15 \Rightarrow 195 = m \cdot r_3 + 15 \Rightarrow 180 = m r_3 \Rightarrow m \mid 180 \end{array} \Rightarrow$$

$\Rightarrow m = \text{divizor comun al celor 3 nr} \Rightarrow (134, 150, 180) = m$

$$\begin{array}{l} 134 = 2 \cdot 67 \\ 150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \\ 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \end{array} \Rightarrow (134, 150, 180) = 2 \Rightarrow m=2$$

Dar $m > 12, m > 10, m > 15 \Rightarrow m > 15$

Cum $m=2 < 15 \Rightarrow$ nu există $m \in \mathbb{N}^*$ care să respecte condiția din enunț.

(6) Tema unui elev este alcătuită din mai mult de 30 de probleme, dar nu mai puțin de 50. Dacă acesta ar rezolva câte 3, 6 sau 8 probleme pe zi, de fiecare dată, i-ar rămâne de rezolvat o singură problemă. Câte probleme conține tema?

$p = \text{nr probleme} \Rightarrow 30 < p < 50$.

$$\begin{array}{l} p:3 = r_1, r=1 \Rightarrow p = 3r_1 + 1 \Rightarrow p-1 = 3r_1 \Rightarrow (p-1) \in \mathcal{M}_3 \\ p:6 = r_2, r=1 \Rightarrow p = 6r_2 + 1 \Rightarrow p-1 = 6r_2 \Rightarrow (p-1) \in \mathcal{M}_6 \\ p:8 = r_3, r=1 \Rightarrow p = 8r_3 + 1 \Rightarrow p-1 = 8r_3 \Rightarrow (p-1) \in \mathcal{M}_8 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p-1) \in [3, 6, 8] = 24 \Rightarrow p-1 = 24k \Rightarrow p = 24k+1 \quad \left. \begin{array}{l} 30 < p < 50 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 30 < 24k+1 < 50 \Rightarrow 29 < 24k < 49 \Rightarrow k=2$

Deci $p = 49$