

Geometrie

Unghiuri

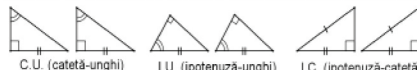
- **congruente** : au măsuri egale
- **adiacente** : au același vârf și o latură comună
- **opuse la vârf** : au același vârf și laturile unuia sunt în prelungirea laturilor celuilalt
- Două unghiuri opuse la vârf sunt congruente
- **complementare** : două unghiuri care au suma 90°
Ex. complementul unghiului de 20° este unghiul de 70°
- **suplementare** : două unghiuri care au suma 180°
Ex. suplementul unghiului de 20° este unghiul de 160°
- unghi **alungit** : care are 180° ; unghi **nul** care are 0°
- unghi **propriu** : care nu este nici alungit, nici nul
- unghi **ascuțit** $< 90^\circ$; **drept** $= 90^\circ$; **obțuz** $> 90^\circ$
- unghiuri în jurul unui punct
- Suma unghiurilor în jurul unui punct este 360°
- Unghiuri formate de două drepte cu o secantă
- **alterne interne** : 1 și 7; 2 și 8
- **alterne externe** : 3 și 5; 4 și 6
- **correspondente** : 1 și 5; 2 și 6; 3 și 7; 4 și 8
- Dacă dreptele sunt paralele, aceste perechi de unghiuri sunt congruente și reciproc.

Teoreme importante

Cazurile de congruența a triunghiurilor oarecare



Cazurile de congruența specifice triunghiurilor dreptunghice



- suma unghiurilor unui triunghi este 180°
- suma unghiurilor unui patrulater este 360°
- unghiurile de la baza unui triunghi isoscel sunt congruente
- într-un triunghi isoscel, bisectoarea unghiului de la vârf este și mediană, înălțime, mediatore.
- într-un triunghi dreptunghic, mediana din vârful unghiului drept este jumătate din ipotenuză.
- într-un triunghi dreptunghic care are un unghi de 30° , cateta opusă acestui unghi este jumătate din ipotenuză.

- teorema lui **Thales** : $EF \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$
- teorema **fundamentală a asemănării** :

dacă $EF \parallel BC$, atunci $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (sunt asemenea), adică

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

Cazurile de asemanare a triunghiurilor

- $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (adică sunt asemenea) dacă:
- cazul I $\angle A \equiv \angle D$ și $\angle B \equiv \angle E$
- cazul II $\angle A \equiv \angle D$ și $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$
- cazul III $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare

- teorema **bisectoarei**: dacă AD este bisectoare, $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$

- într-un $\triangle$ dreptunghic:
- teorema **înălțimii**: $AD = \sqrt{BD \cdot DC}$
- teorema **catetelor**: $AB = \sqrt{BD \cdot BC}$
- teorema lui **Pitagora**: $AB^2 + AC^2 = BC^2$
- **unghiul la centru** $\angle AOB$ are măsura egală cu a arcului cuprins între laturi
- **unghiul înscris** $\angle AMB$ are măsura jumătate din arcul cuprins între laturi
- unghiul format de o tangentă cu o coardă este jumătate din arcul subîntins de coardă
- raza este perpendiculară pe tangentă
- diametrul perpendicular pe o coardă înjumătățește și coarda și arcul.



cercuri secante cercuri tangente cercuri tangente cercuri concentrice

- puncte **concordice**: care se afla pe un cerc

Trigonometrie

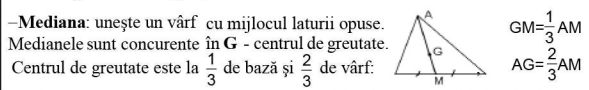
	30°	45°	60°
$\sin u = \frac{\text{cat.op.}}{\text{ip}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos u = \frac{\text{cat.al.}}{\text{ip}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan u = \frac{\text{cat.op.}}{\text{cat.al.}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot u = \frac{\text{cat.al.}}{\text{cat.op.}}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$			
$\tan u = \frac{\sin u}{\cos u}$			

Puncte și drepte

- puncte **coliniare**: sunt situate pe o dreaptă
- drepte **concurrente**: drepte care se intersectează
- **punct de concurență**: punctul în care se intersectează două drepte
- **semidreapta deschisă**: $(OA \quad O \notin OA)$
- **semidreapta închisă**: $[OA \quad O \in [OA)$
- segmente **congruente**: au lungimi egale $[AB] \equiv [CD]$
- drepte **perpendiculare**: formează un unghi drept $a \perp b$
- drepte **paralele**: sunt în același plan și nu se intersectează $a \parallel b$
- **Axioma lui Euclid**: printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură paralelă la dreapta dată.

Linii importante în triunghi

- **Bisectoarea**: împarte un unghi în două unghiuri congruente. Bisectoarele sunt concurrente în **I** - centrul cercului înscris
- **Mediatoarea**: perpendiculară pe mijlocul unei laturi. Mediatoarele sunt concurrente în **O** - centrul cercului circumscris. La triunghiul obtuzunghic, O este situat în exterior. La triunghiul dreptunghic, O este în mijlocul ipotenuzei.
- **Înălțimea**: perpendiculara dintr-un vârf pe latura opusă. Înălțimile sunt concurrente în **H** - ortocentrul. La triunghiul obtuzunghic, H este în exterior.
- **Mediana**: unește un vârf cu mijlocul laturii opuse. Medianele sunt concurrente în **G** - centrul de greutate. Centrul de greutate este la $\frac{1}{3}$ de bază și $\frac{2}{3}$ de vârf:



Simetrie

- Triunghiul $A'B'C'$ este simetricul triunghiului ABC față de punctul O - centru de simetrie
- Triunghiul $A'B'C'$ este simetricul triunghiului ABC față de dreapta d - axă de simetrie

Arii și alte formule

- **Triunghi** $A_s = \frac{b \cdot h}{2}$; $A_s = \frac{ab \sin C}{2}$; $A_s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde p este semiperimetrul, $p = \frac{a+b+c}{2}$ (**formula lui Heron**)

- Triunghi **echilateral**: înălțimea $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; aria $A_{s\text{ech}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
- Triunghi **dreptunghic**: înălțimea $h = \frac{c_1 \cdot c_2}{ip}$; aria $A_{s\text{dr.}} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$

- **Linia mijlocie în triunghi** - unește mijloacele a două laturi; Este paralelă cu a treia latură și este jumătate din aceasta.
- **Raza cercului înscris** în triunghi $r = \frac{A}{p}$ (A-aria, p-semiperimetrul)

- Unghi exterior al unui triunghi

- **Paralelogram** $A = b \cdot h$
- **Dreptunghi** $A = l \cdot l$
- **Romb** $A = \frac{D \cdot d}{2}$
- **Pătrat** $A = l^2$

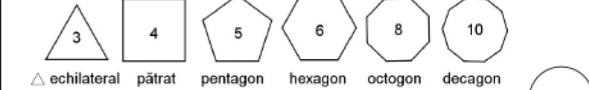
- **Trapez** $A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$ sau $l_m \cdot h$

- **Linia mijlocie în trapez** - unește mijloacele laturilor neparalele; Este paralelă cu bazele și este egală cu media lor aritmetică: $l_m = \frac{B+b}{2}$

- Segmentul care unește mijloacele diagonalelor unui trapez este egal cu $\frac{B-b}{2}$

- **Poligon regulat** - are toate laturile congruente și unghiurile congruente
- n - nr. laturi apotema $a_n = R \cos \frac{180^\circ}{n}$; latura $l_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$

- Măsura unghiului $u_n = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$; Nr. diagonalelor $= \frac{n(n-3)}{2}$



- **Cerc** Lungimea (circumferința) $L = 2\pi R$, Aria $A = \pi R^2$, $\pi \approx 3,14159265...$

Figuri geometrice

Triunghi

- **isoscel**: are două laturi congruente
- **echilateral**: are toate laturile congruente
- **oarecare**: are laturi de lungimi diferite
- **ascuțit**: toate unghiurile ascuțite
- **obțuzunghic**: are un unghi obțuz
- **dreptunghic**: are un unghi drept
- **catete**: laturile care formează unghiul drept
- **ipotenuza**: latura opusă unghiului drept

Patrulater

- **Paralelogram**: are laturile opuse paralele
- Proprietățile paralelogramului:
- laturile opuse sunt congruente
- unghiurile opuse sunt congruente, iar unghiurile alăturate sunt suplementare
- diagonalele au același mijloc

- **Dreptunghiul**: paralelogramul care are un unghi drept
- diagonalele dreptunghiului sunt congruente

- **Rombul**: paralelogramul care are două laturi alăturate congruente
- diagonalele rombului sunt perpendiculare și sunt bisectoare ale unghiurilor

- **Pătratul**: are toate proprietățile dreptunghiului și rombului

- **Trapezul**: are două laturi paralele și celelalte două neparalele

- **Trapez isoscel** are laturile neparalele congruente
- **Trapez dreptunghic** are un unghi drept

Geometrie în spatiu

- O dreapta este perpendiculară pe un plan dacă este perpendiculară pe două drepte concurrente din acel plan
- Dacă o dreapta este perpendiculară pe un plan, atunci ea este perpendiculară pe toate dreptele din acel plan.

- **teorema celor trei perpendiculare** : $AM \perp \alpha, MB \perp d \Rightarrow AB \perp d$

- Unghiul dintre o dreapta și un plan este egal cu unghiul format de dreapta cu proiecția ei pe plan.

- Aria proiecției pe un plan a unei figuri cu aria A este egală cu $A \cdot \cos u$, unde u este unghiul format de planul figuri cu planul de proiecție.

Poliedre

- **Prisma** $V = A_b \cdot h$
- A_L = suma ariilor fețelor laterale
- $A_L = P_b \cdot h$
- Aria totală $A_T = A_L + 2A_b$
- Diagonala paralelipipedului $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- Diagonala cubului $d = l\sqrt{3}$

- **Piramida** $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$
- A_L = suma ariilor fețelor laterale
- $A_L = P_b \cdot ap$
- Aria totală $A_T = A_L + A_b$
- apotemă = înălțimea unei fețe laterale
- Volumul tetraedrului regulat $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

- **Trunchiul de piramidă**
- $V = \frac{h}{3} (A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b})$
- A_L = suma ariilor fețelor laterale
- $A_L = \frac{(P_B + P_b) \cdot ap}{2}$
- Aria totală $A_T = A_L + A_B + A_b$

- **Corpuri rotunde**

- **Cilindrul** $A_L = 2\pi R G$
- $A_T = A_L + 2A_b$
- $V = \pi R^2 h$

- **Conul** $A_L = \pi R G$
- $A_T = A_L + A_b$
- $V = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3}$

- unghiul sectorului desfășurării $u = \frac{360^\circ R}{G}$

- **Trunchi de con**
- $A_L = \pi G (R + r)$
- $A_T = A_L + A_B + A_b$
- $V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr)$

- **Sfera** $A = 4\pi R^2$
- $V = \frac{4\pi R^3}{3}$