

Matrice inversabile

i) Considerații teoretice

O matrice A , $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, nenulă are *rangul* r , dacă A are un minor de ordinul r nenul, iar toți determinanții lui A de ordin mai mare ca r (dacă există), sunt nuli. În calculul rangului unei matrice A se are în vedere teorema care afirmă că $r = \text{rang} A \Leftrightarrow$ toți minorii de ordinul $r+1$ (dacă există) sunt nuli.

Rangul matricei nule este 0.

Matricea unitate de ordin n , $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ comută cu orice matrice A de același

ordin cu ea: $AI_n = I_n A = A$.

O matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ este *inversabilă* dacă există o matrice $B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = BA = I_n$. Matricea B se numește *inversa* lui A ; se mai notează cu A^{-1} și este unică.

Matricea $A \in M_n(\mathbb{C})$ se numește *singulară* (sau *degenerată*) dacă $\det A = 0$ și se numește *nesingulară* (sau *nedegenerată*) dacă $\det A \neq 0$.

Matricea $A \in M_n(\mathbb{C})$ este inversabilă $\Leftrightarrow A$ este nesingulară.

Pentru calculul lui A^{-1} se disting etapele:

- se calculează $\det A$; dacă $\det A \neq 0$, matricea A este inversabilă;

- calculul matricei transpuse $A^t = \|a_{ji}\|, i, j = 1, 2, \dots, n$;

- se calculează matricea adjunctă A^* , având elemente $a_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$;

- se scrie expresia matricei inverse $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$.

ii) Exerciții rezolvate

1. Să se calculeze rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

$$\min(1, 2) = 1 \Rightarrow 1 \leq r \leq 2.$$

Calculăm minorii de ordinul al doilea ai matricei A .

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0; d_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 2 = 0; d_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$$

Cum toți minorii de ordinul al doilea sunt nuli atunci $r < 2 \Rightarrow r = 1$.

2. Să se calculeze rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

$$\min(1, 2) = 1 \Rightarrow 1 \leq r \leq 2.$$

Calculăm minorii de ordinul al doilea ai matricei A.

$$d_1 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0; d_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 1 = -5 \neq 0 \Rightarrow r = 2$$

3. Să se calculeze rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -13 & 11 \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

$$\min(3; 4) = 3 \Rightarrow 1 \leq r \leq 3.$$

Calculăm minorii de ordinul al treilea ai matricei A.

$$d_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -13 \end{vmatrix} = 0; d_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & 5 & 11 \end{vmatrix} = 0; d_3 = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 3 & 3 & -3 \\ 3 & -13 & 11 \end{vmatrix} = 0;$$

$$d_4 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ -1 & 3 & -3 \\ 5 & 13 & 11 \end{vmatrix} = 0.$$

Cum toți minorii de ordinul al treilea sunt nuli atunci $r < 3$.

Calculăm în continuare minorii de ordinul al doilea.

$$d'_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 6 = -9 \neq 0 \Rightarrow r = 2.$$

4. Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât rangul matricei $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & \alpha & -3 \end{pmatrix}$ să fie doi.

Rezolvare:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & \alpha & -3 \end{vmatrix} = -9 + \alpha - 6 + 6 = \alpha - 9$$

Caz 1. Dacă $\alpha - 9 \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq 9 \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow r = 3$ (nu convine);

Caz 2. Dacă $\alpha - 9 = 0 \Rightarrow \alpha = 9 \Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow r < 3$

Calculăm minorii de ordinul al doilea.

$$d_1 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow r = 2.$$

În concluzie pentru $\alpha = 9 \Rightarrow r = 2$.

5. Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât rangul matricei $A = \begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ \alpha & x & x \\ \alpha & 2 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$ să fie trei.

Rezolvare:

$$\det A = \begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ \alpha & x & x \\ \alpha & 2 & 1 \end{vmatrix} = x^2 + 2\alpha + 3x\alpha - x\alpha - 2x^2 - 3\alpha = -x^2 + 2x\alpha - x\alpha$$

$$r = 3 \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow -x^2 + 2x\alpha - x\alpha \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{l} a = -1 \\ b = 2\alpha \\ c = -\alpha \end{array} \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 4\alpha^2 - 4\alpha$$

$$\text{Impunem condiția ca } \Delta < 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 4\alpha < 0 \Leftrightarrow 4\alpha(\alpha - 1) < 0 \Rightarrow \alpha \in (0, 1).$$

6. Să se determine rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 1 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix}$.

Rezolvare:

$$\min(4, 5) = 4 \Rightarrow 1 \leq r \leq 4$$

Calculăm minorii de ordinul al patrulea ai matricei A.

$$\begin{aligned} d_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} \begin{array}{l} C_2 - C_1 \\ = \\ C_3 - C_1 \\ C_4 - C_1 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \\ &= 95 + 54 + 54 - 45 - 76 - 81 = 1 \neq 0 \Rightarrow r = 4 \end{aligned}$$

7. Să se arate că matricea A este inversabilă și să se determine inversa în fiecare din următoarele cazuri:

$$(i) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad (ii) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare:

i) Calculăm determinantul matricei A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 6 = 5 \neq 0 \Rightarrow A \text{ este matrice inversabilă.}$$

$$\text{Scriem transpusa matricei A, } A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Determinăm adjuncta matricei A, } A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-1) = -1 \\ a_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-2) = 2 \\ a_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3 \\ a_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1 \end{array} \right| \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inversa matricei A, se determină cu ajutorul relației: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

$$(ii) \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \Rightarrow A \text{ este matrice inversabilă.}$$

Scriem transpusa matricei A, $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Determinăm adjuncta matricei A, $A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$a_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6, a_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, a_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3,$$

$$a_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, a_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, a_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$a_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -14, a_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0, a_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -14 & 0 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -14 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & 0 & -\frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & 0 & \frac{1}{7} \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iii) Exerciții propuse

1. Să se calculeze rangul matricei A, în următoarele cazuri:

i) $A = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 8 \end{pmatrix};$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix};$

iii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix};$

$$\begin{aligned}
 \text{iv) } A &= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & 4 \end{pmatrix}; & \text{v) } A &= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}; & \text{vi) } A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \\
 \text{vii) } A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -6 & 12 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}; & \text{viii) } A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; & \text{ix) } A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \\
 \text{x) } A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}; & \text{xi) } A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

2. Să se discute în funcție de parametrul real m , rangul următoarelor matrici:

$$\begin{aligned}
 \text{i) } A &= \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & m \end{pmatrix}; & \text{ii) } A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & m \end{pmatrix}; \\
 \text{iii) } A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & m \\ -6 & 3 \end{pmatrix}; & \text{iv) } A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ m & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \\
 \text{v) } A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & m & 2 \end{pmatrix}; & \text{vi) } A &= \begin{pmatrix} m-2 & 1 & 1 \\ 1 & m-2 & 1 \\ 1 & 1 & m-2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

3. Să se afle valorile lui $\alpha \in \mathbb{C}$, pentru care matricea $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ \alpha & 3 & 5 & -3 \\ 7 & -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ are rangul minim.

4. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & m \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & m & 4 \\ 3 & -1 & 1 & n \end{pmatrix}$. Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$, astfel încât cele două matrice să aibă același rang.

Indicații.

$$\Delta_A' = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \Rightarrow r_A = 2; \quad \Delta_A'' = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & m \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5m + 19, \text{ unde } \Delta_A' \text{ și } \Delta_A'' \text{ sunt}$$

minori de ordin 2, respectiv 3, ai matricei A ;

$$\text{Dacă } m = \frac{19}{5} \Rightarrow \Delta_A'' = 0 \Rightarrow r_A = 2; \text{ dacă } m \neq \frac{19}{5} \Rightarrow \Delta_A'' \neq 0 \Rightarrow r_A = 3$$

$$\Delta_B' = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \Rightarrow r_B = 2; \quad \Delta_B'' = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & m \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5m + 19, \text{ unde } \Delta_B' \text{ și } \Delta_B'' \text{ sunt}$$

minori de ordin 2, respectiv 3, ai matricei B;

$$\text{Dacă } m \neq \frac{19}{5} \Rightarrow \Delta_B'' \neq 0 \Rightarrow r_B = 3; \quad \Delta_B''' = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & n \end{vmatrix} = 7n - 44;$$

$$\text{Dacă } m = \frac{19}{5} \Rightarrow n = \frac{44}{7} \text{ pentru ca } r_A = r_B = 2.$$

5. Să se calculeze rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & m & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 2m & 5 \\ 2 & 10 & -12 & 1 \end{pmatrix}$ (discuție după $m \in \mathbb{R}$).

6. Fie matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}.$

i) Să se găsească valorile lui x pentru care $A(x) < 4$;

ii) Pentru fiecare din valorile lui x găsite mai sus să se afle rangul matricei $A(x)$.

7. Să se determine rangul matricei $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \alpha & \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$

8. Fie matricea $A \in M_{3,4}(\mathbb{R}), B \in M_3(\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & \alpha \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & \beta & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & \alpha \\ 2 & -3 & 2 \\ \alpha & -1 & 1 \end{pmatrix}$

i) Să se calculeze rangul matricei A;

ii) Să se determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $r_A = r_B$.

9. Să se verifice, prin calcul, că matricile A și B sunt inverse una alteia, în următoarele cazuri:

i) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$ ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$

iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$ iv) $A = \begin{pmatrix} 0,4 & -0,4 & -0,2 \\ 0,2 & 0,3 & -0,1 \\ -0,4 & -0,1 & 0,7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix};$

$$\text{v)} A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 1 \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \text{vi)} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. Să se stabilească dacă următoarele matrice sunt inversabile și în caz afirmativ să se calculeze inversele lor:

$$\text{i)} A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}; \quad \text{ii)} B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{iii)} C = \begin{pmatrix} 2^x & 3^x \\ 4^x & 6^x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R};$$

$$\text{iv)} D = \begin{pmatrix} \log_2 x & \log_3 x \\ \log_x 3 & \log_x 2 \end{pmatrix}; \quad \text{v)} E = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}; \quad \text{vi)} F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{vii)} G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{viii)} H = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Să se determine valorile parametrului real m , astfel încât matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & x & 3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix}$ să

fie inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

12. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ m^2 & 1 & m \\ m & m^2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}), m \in \mathbb{R}$. Să se determine m astfel încât A să

fie inversabilă.

13. Să se determine $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ astfel încât matricea A să fie inversabilă pentru oricare $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{i)} A = \begin{pmatrix} 5 & x & 3 \\ 2x & -1 & x \\ m+1 & 2 & m \end{pmatrix}; \quad \text{ii)} A = \begin{pmatrix} 1 & x & -3 \\ x & -1 & x \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

14. Dacă $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, să se arate că:

i) matricea $I_3 + A$ este inversabilă;

ii) $(I_3 + A)^{-1} \cdot (I_3 - A) = (I_3 - A) \cdot (I_3 + A)^{-1}$.

15. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & m & 1 \\ m & -2 & 0 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}, m \in \mathbb{R}$. Se cere:

- i) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea A să fie inversabilă;
- ii) Pentru $m=2$, determinați A^{-1} ;
- iii) Să se arate că dacă $m=0$, atunci $A^n = O_3$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.

Indicații.

iii) pentru $m=0 \Rightarrow \det A = 2 \Rightarrow \det(A^n) = \underbrace{\det A \cdot \det A \cdot \dots \cdot \det A}_{n \text{ ori}} = 2^n \neq 0 \Rightarrow A^n \neq O_3$.

16. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- i) Arătați că $A^3 = I_3$;
- ii) Calculați în două moduri produsul $(A - I_3)(A^2 + A + I_3)$;
- iii) Arătați că A este inversabilă și determinați A^{-1} ;
- iv) Calculați $(A - I_3) \cdot A^{-1} \cdot (A^2 + A + I_3)$.