

**Examenul național de bacalaureat 2026
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
11 decembrie 2025**

Simulare

*Filiera teoretică, profil real, specializarea matematică – informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică – informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de trei ore.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

- 5p 1. Calculați conjugatul numărului complex $z = (1+i)^8 - i$.
- 5p 2. Să se determine $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ pentru care $(a-1)x^2 - (a-1)x + a + 3 \leq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+5} = \sqrt[3]{2^{2x}}$.
- 5p 4. Considerăm mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $M = \{f \mid f: A \rightarrow A\}$. Calculați probabilitatea ca alegând o funcție din mulțimea M , aceasta să fie injectivă.
- 5p 5. Fie $ABCD$ paralelogram și punctele E și F astfel încât $\overline{AE} = \overline{ED}$ și $\overline{BF} = 2\overline{FE}$. Să se demonstreze că A, F, C sunt coliniare.
- 5p 6. Triunghiul $\triangle ABC$ are $AB=5, AC=12, BC=13$. Arătați că $R = \frac{13}{4}r$, unde R este raza cercului circumscris și r este raza cercului înscris în triunghiul ABC .

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + 2ay + z = -1 \\ 2ax + y + (a+1)z = 0 \end{cases}$$
, unde a este un număr real.
- 5p a) Rezolvați sistemul pentru $a=0$.
- 5p b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică.
- 5p c) Pentru $a=-1$, determinați soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$.
2. Pe mulțimea $G = (0,1)$ considerăm legea de compoziție “*”, definită prin $x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$, oricare ar fi $x, y \in G$.
- 5p a) Verificați dacă $e = \frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție.
- 5p b) Arătați că $x * y \in G$ oricare ar fi $x, y \in G$.
- 5p c) Știind că legea de compoziție “*” determină o structură algebrică de grup pe mulțimea G , determinați numerele reale a, b pentru care funcția $f: G \rightarrow (0, +\infty), f(x) = \frac{a}{x} - b$ este izomorfism de grupuri între $(G, *)$ și $((0, +\infty), \cdot)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x+1}$.

5p	a) Arătați că $f'(x) = \frac{x-2}{(x+1)^2 \sqrt{x^2+2}}$, $x \in (-1, +\infty)$.
5p	b) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^{5x}$.
5p	c) Arătați că $\sqrt{3(e^{2x}+2)} \geq (e^x+1)\sqrt{2}$, pentru orice $x \in (-1, \infty)$.
	2. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x}$.
5p	a) Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
5p	b) Calculați $\int f(x) dx$.
5p	c) Determinați o primitivă a funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) \sin x$ pentru care $G\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln \sqrt{\frac{2}{e}}$

Examenul național de bacalaureat 2026

Proba E. c)

Matematică M_mate-info

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

11 decembrie 2025

Simulare

Filiera teoretică, profil real, specializarea matematică – informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică – informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z = (1+i)^8 - i = \left[(1+i)^2\right]^4 - i = (2i)^4 - i = 2^4 i^4 - i = 16 - i \Rightarrow$ $\bar{z} = 16 + i$	3p 2p
2.	$\begin{cases} a-1 < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 1 \\ (a-1)(-3a-13) \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a \in (-\infty, 1) \\ a \in \left(-\infty, -\frac{13}{3}\right] \cup [1, \infty) \end{cases} \Rightarrow a \in \left(-\infty, -\frac{13}{3}\right]$	3p 2p
3.	$2^{x+5} = \sqrt[3]{2^{2x}} \Rightarrow 2^{x+5} = 2^{\frac{2x}{3}} \Rightarrow$ $\Rightarrow x+5 = \frac{2x}{3} \Rightarrow 3x+15 = 2x \Rightarrow x = -15$ soluție a ecuației.	3p 2p
4.	$f: A \rightarrow A, A$ finită, f injectivă, rezultă f bijectivă. Numărul cazurilor favorabile este numărul funcțiilor bijective adică $4!$ Numărul cazurilor posibile este numărul funcțiilor $f: A \rightarrow A$ adică 4^4 . $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{4!}{4^4} = \frac{24}{256} = \frac{3}{32}$	2p 1p 2p
5.	$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{EF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{EB} \Rightarrow \overrightarrow{BF} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BE}$ $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \right) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \Rightarrow A, F, C$ coliniare	2p 3p
6.	$5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow$ conform reciprocei teoremei lui Pitagora că $A = 90^\circ \Rightarrow R = \frac{13}{2}$. $r = \frac{S}{p}; S = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30; p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5+12+13}{2} = 15 \Rightarrow r = \frac{30}{15} = 2 \Rightarrow R = \frac{13}{4} r$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	a) $\begin{cases} x+y=1 \\ x+z=-1 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow$ $x=0, y=1, z=-1 \Rightarrow (x_0, y_0, z_0) = (0, 1, -1)$	2p 3p
-----------	---	------------------------

	b) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2a & 1 \\ 2a & 1 & a+1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2a+2 & 2a+2 & 2a+2 \\ 1 & 2a & 1 \\ 2a & 1 & a+1 \end{vmatrix} \neq 0$ $2(a+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 2a & 1 & a+1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 2(a+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2a-1 & 0 \\ 2a & 1-2a & 1-a \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow$ $2(a+1)(2a-1)(1-a) \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm 1, \frac{1}{2} \right\}$	2p 3p
	c) Pentru $a = -1$ avem $\Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow \text{rang } A \leq 2$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A = 2$. $\Delta_{car} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rang } \bar{A} = \text{rang } A = 2$ $z = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1+\alpha \\ x-2y=-1-\alpha \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\alpha+1}{3}, \frac{2(\alpha+1)}{3}, \alpha \right)$ $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1 \Rightarrow \frac{5}{9}(\alpha+1)^2 + (\alpha+1)(\alpha-1) = 0 \Rightarrow (\alpha+1) \left(\frac{5}{9}\alpha + \frac{5}{9} + \alpha - 1 \right) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -1, \alpha_2 = \frac{2}{7}$ $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, -1), (x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{2}{7} \right)$	2p 3p
2.	a) Verifică $x * \frac{1}{2} = x, (\forall) x \in G$ Verifică $\frac{1}{2} * x = x \Rightarrow x * \frac{1}{2} = \frac{1}{2} * x = x, (\forall) x \in G \Rightarrow e = \frac{1}{2} \in (0, 1)$ este element neutru b) Numărătorul $x \cdot y > 0$, pentru $x, y \in (0, 1)$. Analizăm numitorul: $2xy - x - y + 1 = (1-x)(1-y) + xy > 0$. Arătăm că $x * y < 1$: $\frac{xy}{2xy - x - y + 1} < 1 \Leftrightarrow xy < 2xy - x - y + 1 \Leftrightarrow 0 < (1-x)(1-y)$ care este adevărat pentru $x, y \in (0, 1)$. Deci $x * y \in (0, 1)$ pentru $x, y \in (0, 1)$.	2p 3p
	c) f izomorfism de grupuri $\Rightarrow f(e_1) = e_2 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow 2a - b = 1 \Rightarrow b = 2a - 1$ $f(x * y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in G \Rightarrow \frac{a}{x * y} - 2a + 1 = \left(\frac{a}{x} - 2a + 1\right) \left(\frac{a}{y} - 2a + 1\right)$ $\Rightarrow a \left(2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \right) - 2a + 1 = \left(\frac{a}{x} - 2a + 1\right) \left(\frac{a}{y} - 2a + 1\right) \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{a^2 - a}{xy} - \frac{2(a^2 - a)}{x} - \frac{2(a^2 - a)}{y} + 4(a^2 - a) = 0 \Rightarrow (a^2 - a) \left(\frac{1}{xy} - \frac{2}{x} - \frac{2}{y} + 4 \right) = 0, \forall x, y \in G \Rightarrow$ $a = 0$ sau $a = 1$ Cazul $a = 0$ se respinge, deoarece atunci f ar fi constantă și nu ar putea fi izomorfism. Rămâne $a = 1 \Rightarrow b = 1$	2p 3p

1.a)	$f'(x) = \frac{(\sqrt{x^2+2})'(x+1) - (x+1)'\sqrt{x^2+2}}{(x+1)^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} \frac{(x+1) - \sqrt{x^2+2}}{(x+1)^2} =$ $= \frac{x^2 + x - (x^2 + 2)}{(x+1)^2 \sqrt{x^2+2}} = \frac{x-2}{(x+1)^2 \sqrt{x^2+2}}, x \in (-1, +\infty)$	2p 3p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^{5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{x+1} \right)^{5x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+2}{(x+1)^2} \right)^{\frac{5x}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2+2x+1} \right)^{\frac{5x}{2}} =$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x^2+2}{x^2+2x+1} - 1 \right)^{\frac{5x}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{-2x+1}{x^2+2x+1} \right)^{\frac{x^2+2x+1}{-2x+1}} \right]^{\frac{-2x+1}{x^2+2x+1} \cdot \frac{5x}{2}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x(-2x+1)}{2(x^2+2x+1)}} =$ $= e^{-\frac{5 \cdot 2}{2}} = e^{-5}.$	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$ Dacă $x \in (-1, 2) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-1, 2)$ Dacă $x \in (2, +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(2, +\infty) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) \geq f(2), f(2) = \frac{\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow f(e^x) \geq f(2) \Rightarrow 3\sqrt{e^{2x}+2} \geq \sqrt{6}(e^x+1)$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ $\sqrt{3(e^{2x}+2)} \geq (e^x+1)\sqrt{2}$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$.	2p 3p
2.a)	$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a lui $f \Rightarrow F$ derivabilă pe $\mathbb{R} \Rightarrow F'(x) = f(x)$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 2 - \cos^2 x > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos x \geq 0 \Rightarrow$ $f(x) = \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x} \geq 0, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow F$ este strict crescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.	2p 3p
b)	$2 - \cos^2 x = 1 + \sin^2 x \Rightarrow \sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$, respectiv și obținem $\int f(x) dx = \int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx \Rightarrow \int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctg t + C \Rightarrow \int f(x) dx = \arctg(\sin x) + C.$	2p 3p
c)	$G(x) = \int \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x} \sin x dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{2 - \cos^2 x} (2 - \cos^2 x)' dx = \frac{1}{2} \ln(2 - \cos^2 x) + k$ $G\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{2}{e} \Rightarrow \frac{1}{2} \ln 2 + k = \frac{1}{2} \ln \frac{2}{e} \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow G(x) = \frac{1}{2} \ln(2 - \cos^2 x) - \frac{1}{2}$	3p 2p