

Probleme date la Concursul
Adolf Haimovici

Subiectul 1

① $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Arătați că $A^2 - 5A + 4I_2 = O_2$

b) Determinați $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ a.î. $A^5 = \alpha A + \beta I_2$

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$

$5A = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^2 - 5A + 4I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Teorema lui CAYLEY-HAMILTON

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 - \underbrace{(a+d)}_{\text{suma elem. de pe diag. principale}} \cdot A + \underbrace{(ad-bc)}_{\text{suma matricii A}} I_2 = O_2$

suma elem.
de pe diag.
principale

suma
matricii A

$A^2 - \text{Tr}(A) \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2$

$A^2 - 5A + 4I_2 = O \Rightarrow A^2 = 5A - 4I_2$

Calculăm $A^3 \Rightarrow A^3 = A^2 \cdot A = (5A - 4I_2) \cdot A = 5A^2 - 4A$

Cum $A^2 = 5A - 4I_2$

$A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A$

$\Rightarrow A^3 = 5(5A - 4I_2) - 4A$
 $A^3 = 25A - 20I_2 - 4A$
 $A^3 = 21A - 20I_2$

Calculăm $A^4 \Rightarrow A^4 = A^3 \cdot A = (21A - 20I_2) \cdot A = 21A^2 - 20A$

$\Rightarrow A^4 = 21(5A - 4I_2) - 20A$

$A^4 = 105A - 84I_2 - 20A$

$A^4 = 85A - 84I_2$

Calculăm $A^5 \Rightarrow A^5 = A^4 \cdot A = (85A - 84I_2) \cdot A = 85A^2 - 84A$

$A^5 = 85(5A - 4I_2) - 84A = 425A - 340I_2 - 84A = 341A - 340I_2$

①

Dim enunt, avem: $A^5 = \alpha A + \beta I_2$

Dim calcul avem: $A^5 = 341A - 340I_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 341 \\ \beta = -340 \end{cases}$$

② Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ și $f(X) = X^3 - 3X^2 + 2X - 5I_2$ $f(A) = ?$

Soluție C-H $\Rightarrow A^2 - \text{Tr}(A) \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2$ (1)

$$\text{Tr} A = 1 + 2 = 3$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$$

Introducând în (1) obținem:

$$A^2 - 3A + 2I_2 = O_2$$

$$f(A) = \underbrace{A^3 - 3A^2 + 2A - 5I_2}_{\text{factor comun}} = A(A^2 - 3A + 2I_2) - 5I_2$$

$$= \underbrace{A \cdot O_2}_{O_2} - 5I_2 = -5I_2 =$$

$$= -5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Obs: Ex se putea rezolva și prin calcul efectiv.

③ Să se determine matricea A cu toate elementele numere naturale, care verifică relația $(1 \ 2 \ 4) \cdot A = (3 \ 1 \ 2)$

$(1 \ 2 \ 4) \rightarrow$ matrice linie 1×3

$(3 \ 1 \ 2) \rightarrow$ matrice linie 1×3

$\Rightarrow$ pt ca produsul să fie definit trebuie ca A să fie de forma 3×3

Fie $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$

$$(1 \ 2 \ 4) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = (3 \ 1 \ 2) \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 + 4a_3 & b_1 + 2b_2 + 4b_3 & c_1 + 2c_2 + 4c_3 \end{pmatrix} = (3 \ 1 \ 2)$$



$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 4a_3 = 3 \\ b_1 + 2b_2 + 4b_3 = 1 \\ c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 2 \end{cases}$$

Din prima relație $a_1 + 2a_2 + 4a_3 = 3$ $\rightarrow$ deoarece lucrăm cu nr naturale.

Cum $4 > 3 \Rightarrow$ impunem ca $4a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 0$

$$\Rightarrow a_1 + 2a_2 = 3$$

Caz 1: Dacă $a_2 = 0 \Rightarrow a_1 + 0 = 3 \Rightarrow a_1 = 3$

Caz 2: Dacă $a_2 = 1 \Rightarrow a_1 + 2 = 3 \Rightarrow a_1 = 1$.

Soluții: $(1, 1, 0)$ sau $(3, 0, 0)$

Din a doua relație:

$$b_1 + 2b_2 + 4b_3 = 1 \Rightarrow b_1 = 1 \Rightarrow (1, 0, 0)$$

Din a treia relație:

$$c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 2 \Rightarrow c_1 + 2c_2 = 2$$

Caz 1: Dacă $c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 2$

Caz 2: Dacă $c_2 = 1 \Rightarrow c_1 + 2 = 2 \Rightarrow c_1 = 0$.

Soluții: $(2, 0, 0)$ sau $(0, 1, 0)$.

④ Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $a, b = ?$, $a, b \in \mathbb{R}$ a. $A^2 = a \cdot A + b \cdot I_3$;

b) Demonstrați că $(I_3 + A)(I_3 - \frac{1}{4}A) = I_3$;

c) Demonstrați că matricea $B = I_3 + A$ este inversabilă și calculați B^{-1}

a) C-H $A^2 - (\text{tr} A) \cdot A + \det A \cdot I_3 = 0_3$

$$\text{tr} A = 1 + 1 + 1 = 3 \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Rешение C-H} \Rightarrow A^2 - \underbrace{(\text{Tr } A)}_3 \cdot A + \underbrace{\det A}_0 \cdot I_3 = 0_3$$

$$A^2 - 3A = 0_3 \Rightarrow A^2 = 3A + 0_3 \Rightarrow \boxed{A^2 = 3A}$$

$$\text{Din enunt: } A^2 = a \cdot A + b \cdot I_3$$

$$\text{Din calcul: } A^2 = 3A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=0 \end{cases}$$

$$b) \quad (\underbrace{I_3 + A}_B) \cdot (I_3 - \frac{1}{4}A) = I_3$$

$$\boxed{I_3 = I_3^2 = \dots = I_3^m}$$

$$\begin{aligned} (I_3 + A) \cdot (I_3 - \frac{1}{4}A) &= I_3^2 - \frac{1}{4} \underbrace{I_3 \cdot A}_A + \underbrace{A \cdot I_3}_A - \frac{1}{4} A^2 \\ &= I_3 - \frac{1}{4}A + A - \frac{1}{4} \underbrace{A^2}_{3A \text{ (de la pt a)}} \\ &= I_3 - \frac{1}{4}A + \frac{4}{4}A - \frac{1}{4} \cdot 3A \\ &= I_3 + \frac{-A + 4A - 3A}{4} \cdot 0_3 \\ &= I_3 \end{aligned}$$

c) O matrice B este inversabilă dacă $\boxed{\det B \neq 0}$

$$B = I_3 + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 1 + 1 - (2 + 2 + 2) = 10 - 6 = 4 \neq 0$$

$\Rightarrow B$ inversabilă. $\Rightarrow \exists B^{-1}$ a.i.

met 1 $B \cdot B^{-1} = I_3$

de la pt b) avem: $\underbrace{(I_3 + A)}_B \cdot (I_3 - \frac{1}{4}A) = I_3$

$$B \cdot (I_3 - \frac{1}{4}A) = I_3 \Rightarrow \boxed{B^{-1} = I_3 - \frac{1}{4}A}$$

met 2 prin calcul efectiv:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \det B = 4 \neq 0 \Rightarrow B \text{ inversabilă} \Rightarrow \exists B^{-1} \text{ dată de formula}$$

$$\boxed{B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot B^*}$$

Pt a calcula B^* , aflăm mai întâi B^t (transpusa matricii B)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ este simetrică (dar am făcut schimbul între linii și col).}$$

$$B^* = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$b_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot (4-1) = 3$$

(în B^t am tăiat prima linie și prima coloană)

$$b_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (2-1) = -1$$

$$b_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (1-2) = -1$$

$$b_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (2-1) = -1$$

$$b_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (4-1) = 3$$

$$b_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot (2-1) = -1$$

$$b_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (1-2) = -1$$

$$b_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot (2-1) = -1$$

$$b_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot (4-1) = 3$$

$$\Rightarrow B^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot B^* =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

5) Fie $M = \left\{ A_x = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$

a) Calculați $(A_x)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$;

b) Să se arate că funcția $f: M \rightarrow \{ z_x = \cos x + i \sin x / x \in \mathbb{R} \}$, $f(A_x) = z_x$ verifică egalitățile:

$$- f(A_x + A_y) = f(A_x) + f(A_y)$$

$$- f(A_x \cdot A_y) = f(A_x) \cdot f(A_y) \quad \forall A_x, A_y \in M$$

a) Pt a calcula $(A_x)^n$, vom calcula $A_x \cdot A_y$



$$A_x = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \Rightarrow A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x \cos y - \sin x \sin y & \cos x \sin y + \sin x \cos y \\ -\sin x \cos y - \cos x \sin y & -\sin x \sin y + \cos x \cos y \end{pmatrix}$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Observăm că: $\cos x \cos y - \sin x \sin y = -(\sin x \sin y - \cos x \cos y) =$
 (diagonala principală)
 $= \cos(x+y).$

$$-\sin x \cos y - \cos x \sin y = -(\sin x \cos y + \cos x \sin y) = -\sin(x+y)$$

Deci, $A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} \cos(x+y) & \sin(x+y) \\ -\sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix}$

Am demonstrat că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}$

$$(A_x)^n = \underbrace{A_x \cdot A_x \cdot \dots \cdot A_x}_{\text{de } n \text{ ori}} = A_{\underbrace{x+x+\dots+x}_{n \text{ ori}}} = A_{nx} = \begin{pmatrix} \cos nx & \sin nx \\ -\sin nx & \cos nx \end{pmatrix}$$

b) $z_x = \cos x + i \sin x$, $f(A_x) = z_x$

$f(A_x + A_y) = f(A_x) + f(A_y)$ //

$f\left(\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}\right) = \cos x + i \sin x$
 A_x z_x

$$f(A_x + A_y) = f\left(\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \cos x + \cos y & \sin x + \sin y \\ -\sin x - \sin y & \cos x + \cos y \end{pmatrix}\right) =$$

$$= (\cos x + \cos y) + i(\sin x + \sin y) = \underbrace{(\cos x + i \sin x)}_{f(A_x)} + \underbrace{(\cos y + i \sin y)}_{f(A_y)} =$$

$$= f(A_x) + f(A_y)$$

$f(A_x \cdot A_y) = f(A_x) \cdot f(A_y)$ //

aplicăm formula de nr.

$$f(A_x \cdot A_y) = f(A_{x+y}) = z_{x+y} = \cos(x+y) + i \sin(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y +$$

$$+ i \sin x \cos y + i \cos x \sin y = \cos x (\cos y + i \sin y) + i \sin x (\cos y + i \sin y) =$$

$$= (\cos y + i \sin y) (\cos x + i \sin x) = z_y \cdot z_x = f(A_x) \cdot f(A_y) \quad (6)$$