

TEOREMA LUI WEIERSTRASS

Teoremă (Weierstrass).

Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un șir de numere reale.

1. Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este un șir monoton descrescător și mărginit inferior, atunci $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este un șir convergent.
2. Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este un șir monoton crescător și mărginit superior, atunci $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este un șir convergent.
3. Orice șir monoton și mărginit este convergent.

Exerciții rezolvate

1. Să se studieze convergența șirului $x_n = \frac{2n-1}{n}, n \geq 1$

Rezolvare:

a) Mărginirea șirului:

$$0 < x_n = 2 - \frac{1}{n} < 2, \forall n \geq 1 \Rightarrow (x_n)_{n \geq 1} \text{ mărginit.}$$

b) Monotonia șirului:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2(n+1)-1}{n+1} - \frac{2n-1}{n} = \frac{2n+1}{n+1} - \frac{2n-1}{n} = \frac{2n^2 + n - 2n^2 - 2n + n + 1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0, \forall n \geq 1 \Rightarrow (x_n)_{n \geq 1}$$

este strict crescător.

Din a) și b) conform teoremei lui Weierstrass, șirul este convergent.

2. Să se studieze convergența șirului $x_n = \frac{n+4}{2n+1}, n \geq 1$.

Rezolvare:

a) Monotonia șirului:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+5}{2n+3} - \frac{n+4}{2n+1} = \frac{(n+5)(2n+1) - (n+4)(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{2n^2 + 10n + n + 5 - 2n^2 - 3n - 8n - 12}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{-7}{(2n+1)(2n+3)} < 0 \Rightarrow (x_n)_{n \geq 1} \text{ descrescător.}$$

b) Mărginirea șirului:

Este suficient să demonstrăm că șirul este mărginit inferior.

$$x_n = \frac{n+4}{2n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+8}{2n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2n+1)+7}{2n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2n+1}{2n+1} + \frac{7}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{7}{2n+1} \right) > \frac{1}{2} \Rightarrow x_n > \frac{1}{2} \Rightarrow (x_n)_{n \geq 1}$$

este mărginit inferior.

Din a) și b) conform teoremei lui Weierstrass, șirul este convergent.

3. Să se studieze convergența șirului $x_n = \frac{3^n}{n!}, n \geq 2$

Rezolvare:

a) Mărginirea șirului:

$$0 < x_n = \frac{3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n} \Rightarrow 0 < x_n \leq \frac{9}{2} \Rightarrow (x_n)_{n \geq 2} \text{ mărginit.}$$

Dar $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \dots \cdot \frac{3}{n} < 1$

b) Monotonia șirului:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{\cancel{3} \cdot 3}{\cancel{n!} \cdot (n+1)} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{3}} = \frac{3}{n+1} \leq 1 \Rightarrow (x_n)_{n \geq 2} \text{ este descrescător.}$$

Din a) și b) conform teoremei lui Weierstrass, șirul este convergent.

Presupunem că $\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} \Leftrightarrow 1 < 2\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \Leftrightarrow$

adevărat.

b) Mărginirea şirului:

Pentru a găsi marginea superioară, pornim de la inegalitatea $\left| \frac{1}{\sqrt{k}} \right| > 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}, \forall k \geq 1$

În ultima relație adunăm și scădem $2\sqrt{n}$

Din (1) și (2) rezultă că $x_n \in (-2, -1], \forall n \geq 1$, deci șirul este mărginit.

Din a) și b) conform teoremei lui Weierstrass, șirul este convergent.

- Rezolvare:**

a) Monotonia sirului:

$$n=1 \Rightarrow x_2 = 2x_1 + 1 \Rightarrow x_2 = 3 \Rightarrow x_2 > x_1$$

Presupunem că: $P(n): x_n < x_{n+1}, \forall n \geq 0$

I. E.V.: $n = 0 \Rightarrow x_0 < x_1, (A)$

$$\text{II. E.D. Pp. } P(k): x_k < x_{k+1}, \forall k \geq 0$$

Dem. $P(k+1): x_{k+1} < x_{k+2}, \forall k \geq 0$

$$x_k < x_{k+1} \mid \cdot 2 \Rightarrow 2x_k < 2x_{k+1} \mid +1 \Rightarrow 2x_k + 1 < 2x_{k+1} + 1 \Rightarrow x_{k+1} < x_{k+2} \Rightarrow x_n < x_{n+1} \Rightarrow (x_n)_{n \geq 1} \text{ este strict crescător.}$$

Pp. că şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

Notăm $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow a = 2a + 1 \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow a = -1$
 Dar $x_n \geq 0$ $\Rightarrow$ contradicție $\Rightarrow (x_n)_{n \geq 1}$ este divergent.

- Rezolvare:**

a) Monotonia șirului:

$$n=1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x_2 > x_1$$

Presupunem că: $P(n): x_n < x_{n+1}, \forall n \geq 0$

I. E.V.: $n = 0 \Rightarrow x_0 < x_1, (A)$

II. E.D. Pp. $P(k): x_k < x_{k+1}, \forall k \geq 0$

Dem. $P(k+1): x_{k+1} < x_{k+2}, \forall k \geq 0$

$$x_k < x_{k+1} \left| \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} x_k < \frac{1}{2} x_{k+1} \right| + \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} x_k + \frac{3}{2} < \frac{1}{2} x_{k+1} + \frac{3}{2} \Rightarrow x_{k+1} < x_{k+2} \Rightarrow x_n < x_{n+1} \Rightarrow (x_n)_{n \geq 1} \text{ este strict crescător.}$$

b) Mărginirea șirului

$$x_0 = 1, x_2 = 2, x_3 = \frac{5}{2} \Rightarrow x_n \geq 1$$

Presupunem că: $P(n): x_n < 3, \forall n \geq 0$

I. E.V.: $n = 0 \Rightarrow x_0 = 1 < 3, (A)$

II. E.D. Pp. $P(k): x_k < 3, \forall k \geq 0$

Dem. $P(k+1): x_{k+1} < 3, \forall k \geq 0$

$$x_k < 3 \left| \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} x_k < \frac{3}{2} \right| + \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} x_k + \frac{3}{2} < \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \Rightarrow x_{k+1} < 3 \Rightarrow x_n < 3 \Rightarrow (x_n)_{n \geq 1} \text{ este mărginit.}$$

Din a) și b) conform teoremei lui Weierstrass, șirul este convergent.

9. Să se studieze convergența șirului $x_0 = 1, x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}, n \geq 0$.

Rezolvare:

a) Monotonia șirului:

$$n = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt{6+x_0} = \sqrt{6+1} = \sqrt{7} \Rightarrow x_1 > x_0$$

$$n = 1 \Rightarrow x_2 = \sqrt{6+x_1} = \sqrt{6+\sqrt{7}} > \sqrt{7} \Rightarrow x_2 > x_1$$

Presupunem că: $P(n): x_n < x_{n+1}, \forall n \geq 0$

I. E.V.: $n = 0 \Rightarrow x_0 < x_1, (A)$

II. E.D. Pp. $P(k): x_k < x_{k+1}, \forall k \geq 0$

Dem. $P(k+1): x_{k+1} < x_{k+2}, \forall k \geq 0$

$$x_k < x_{k+1} \left| +6 \Rightarrow 6+x_k < 6+x_{k+1} \Rightarrow \sqrt{6+x_k} < \sqrt{6+x_{k+1}} \Rightarrow x_{k+1} < x_{k+2} \Rightarrow x_n < x_{n+1} \Rightarrow (x_n)_{n \geq 1} \text{ este strict crescător.}$$

b) Mărginirea șirului

$$x_0 = 1 < 3, x_1 = \sqrt{7} < 3, x_2 = \sqrt{6+\sqrt{7}} < 3$$

Presupunem că: $P(n): x_n < 3, \forall n \geq 0$

I. E.V.: $n = 0 \Rightarrow x_0 = 1 < 3, (A)$

II. E.D. Pp. $P(k): x_k < 3, \forall k \geq 0$

Dem. $P(k+1): x_{k+1} < 3, \forall k \geq 0$

$$x_k < 3 \left| +6 \Rightarrow x_k + 6 < 9 \Rightarrow \sqrt{x_k + 6} < \sqrt{9} \Rightarrow \sqrt{x_k + 6} < 3 \Rightarrow x_{k+1} < 3 \Rightarrow x_n < 3 \Rightarrow (x_n)_{n \geq 1} \text{ este mărginit superior.}$$

Din a) și b) conform teoremei lui Weierstrass, șirul este convergent.

10. Să se studieze convergența șirului $x_0 = 0, x_{n+1} = \sqrt{6-x_n}, n \geq 0$.

Rezolvare:

a) Monotonia șirului:

$$n = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt{6-x_0} = \sqrt{6} \Rightarrow x_1 > x_0$$

$$n = 1 \Rightarrow x_2 = \sqrt{6-x_1} = \sqrt{6-\sqrt{6}} > 0 \Rightarrow x_2 > x_0$$

Presupunem că: $P(n): x_{2n} < x_{2n+2}, \forall n \geq 0$

I. E.V.: $n = 0 \Rightarrow x_0 < x_2, (A)$

II. E.D. Pp. $P(k): x_{2k} < x_{2k+2}, \forall k \geq 0$

Dem. $P(k+1): x_{2k+2} < x_{2k+4}, \forall k \geq 0$

$$\begin{aligned} x_{2k} < x_{2k+2} \mid \cdot (-1) &\Rightarrow -x_{2k} > -x_{2k+2} \Rightarrow 6 - x_{2k} > 6 - x_{2k+2} \Rightarrow \sqrt{6 - x_{2k}} > \sqrt{6 - x_{2k+2}} \Rightarrow x_{2k+1} > x_{2k+3} \mid \cdot (-1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow -x_{2k+1} < -x_{2k+3} \Rightarrow 6 - x_{2k+1} < 6 - x_{2k+3} \Rightarrow \sqrt{6 - x_{2k+1}} < \sqrt{6 - x_{2k+3}} \Rightarrow x_{2k+2} < x_{2k+4} \Rightarrow x_{2n} < x_{2n+2} \Rightarrow \\ &\text{subșirul } (x_{2n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ este strict crescător.} \end{aligned}$$

Analog se demonstrează că subșirul $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ este strict descrescător.

$$\text{Notăm } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow a = \sqrt{6-a} \mid \uparrow^2 \Rightarrow a^2 = 6-a \Rightarrow a^2 + a - 6 = 0, a_1 = -3, a_2 = 2$$

$$\text{Cum } \begin{matrix} a \geq 0 \\ 6-a \geq 0 \Rightarrow a \leq 6 \end{matrix} \mid \Rightarrow a \in [0, 6] \Rightarrow a = 2 \text{ este soluție.}$$

b) Mărginirea șirului

Presupunem că: $P(n): x_{2n} < 2, \forall n \geq 0$

I. E.V.: $n = 0 \Rightarrow x_0 = 0 < 2, (A)$

II. E.D. Pp. $P(k): x_{2k} < 2, \forall k \geq 0$

Dem. $P(k+1): x_{2k+2} < 2, \forall k \geq 0$

$$\begin{aligned} x_{2k} < 2 \mid \cdot (-1) &\Rightarrow -x_{2k} > -2 \mid +6 \Rightarrow 6 - x_{2k} > 4 \Rightarrow \sqrt{6 - x_{2k}} > 2 \Rightarrow x_{2n+1} > 2 \mid \cdot (-1) \Rightarrow -x_{2n+1} < -2 \mid +6 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 6 - x_{2n+1} < 4 \Rightarrow \sqrt{6 - x_{2n+1}} < 2 \Rightarrow x_{2n+2} < 2 \Rightarrow (x_{2n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ este mărginit superior.} \end{aligned}$$

Analog se demonstrează că $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit inferior.

Din a) și b) conform teoremei lui Weierstrass, șirul este convergent.

Exerciții propuse

1. Să se studieze convergența șirului $x_n = \frac{3n-2}{n}, n \geq 1$
2. Să se studieze convergența șirului $x_n = \frac{n+6}{3n+1}, n \geq 1$.
3. Să se studieze convergența șirului $x_n = \frac{2^n}{n!}, n \geq 1$
7. Să se studieze convergența șirului $x_0 = 0, x_{n+1} = 2x_n + 3$.
8. Să se studieze convergența șirului $x_0 = 0, x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{4}{3}$.
9. Să se studieze convergența șirului $x_0 = \frac{1}{4}, x_{n+1} = \frac{1}{4} + x_n^2$.
10. Să se studieze convergența șirului $x_0 = 2, x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}, n \geq 0$.
11. Să se studieze convergența șirului $x_0 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2x_n}, n \geq 0$.

prof. Ciofu Constantin