

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică  $M\_mate-info$

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul  $n = |1 - \sqrt{2}| + |2 - \sqrt{2}|$  este natural.
- 5p 2. Se consideră funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 11 - x$  și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 1 - 11x$ . Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația  $f(x) \geq g(x)$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $3^x \cdot 2^{x+1} = 72$ .
- 5p 4. Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma folosind doar cifre impare.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-3, 3)$ ,  $B(1, 3)$  și  $C(1, 5)$ . Calculați aria triunghiului  $ABC$ .
- 5p 6. Calculați lungimea razei cercului circumscris  $\triangle ABC$ , știind că  $BC = 4$ ,  $B = \frac{\pi}{3}$  și  $C = \frac{\pi}{6}$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea  $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x-2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x-2} \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det(A(2)) = 1$ .
- 5p b) Demonstrați că  $A(x)A(y) = A(x+y-2)$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p c) Determinați numerele reale  $m$  pentru care  $A(1)A(2)A(3) \cdot \dots \cdot A(10) = A(m^2 + m + 17)$ .
2. Se consideră polinomul  $f = X^3 - 4X^2 + 5X + a$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $f(1) - f(-1) = 12$ .
- 5p b) Determinați numărul real  $a$ , știind că polinomul  $f$  este divizibil cu polinomul  $X - 2$ .
- 5p c) Determinați numărul real  $a$ , știind că toate rădăcinile polinomului  $f$  sunt numere întregi.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p b) Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției  $f$ , în care tangenta la graficul funcției  $f$  este perpendiculară pe axa  $Oy$ .
- 5p c) Demonstrați că  $2^{\sqrt{3}} < 3^{\sqrt{2}}$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4x - x^2$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_0^3 f(x) dx = 9$ .

**5p**   **b)** Arătați că  $\int_1^2 \frac{2-x}{f(x)} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$ .

**5p**   **c)** Pentru fiecare număr natural nenul  $n$ , se consideră numărul  $I_n = \int_0^4 f^n(x) dx$ . Demonstrați că  $I_{n+1} \leq 4I_n$ , pentru orice număr natural nenul  $n$ .

**Examenul de bacalaureat național 2018**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M\_mate-info$**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianta 9**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                   |          |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 1. | $ 1-\sqrt{2}  = \sqrt{2}-1,  2-\sqrt{2}  = 2-\sqrt{2}$<br>$n = \sqrt{2}-1 + 2-\sqrt{2} = 1 \in \mathbb{N}$                                                                                                                                                                        | 2p<br>3p |
| 2. | $11-x \geq 1-11x \Leftrightarrow 10x \geq -10$<br>$x \in [-1, +\infty)$                                                                                                                                                                                                           | 3p<br>2p |
| 3. | $(3 \cdot 2)^x \cdot 2 = 72 \Leftrightarrow 6^x = 36$<br>$x = 2$                                                                                                                                                                                                                  | 3p<br>2p |
| 4. | Cifra sutelor se poate alege în 5 moduri și, pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifra zecilor se poate alege în 4 moduri<br>Pentru fiecare alegere a primelor două cifre, cifra unităților se poate alege în 3 moduri, deci se pot forma $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ de numere | 2p<br>3p |
| 5. | $AB = 4, BC = 2$<br>$\triangle ABC$ este dreptunghic în $B$ , deci $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4$                                                                                                                                                        | 2p<br>3p |
| 6. | $A = \pi - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}$<br>$R = \frac{BC}{2} = 2$                                                                                                                                                                                  | 2p<br>3p |

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

|      |                                                                                                                                                                                                                                                  |          |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 1.a) | $A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$<br>$= 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$                                       | 3p<br>2p |
| b)   | $A(x)A(y) = \begin{pmatrix} 1 & y-2+x-2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x-2} \cdot e^{y-2} \end{pmatrix} =$<br>$= \begin{pmatrix} 1 & x+y-4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x+y-4} \end{pmatrix} = A(x+y-2),$ pentru orice numere reale $x$ și $y$ | 3p<br>2p |
| c)   | $A(1+2+\dots+10-2 \cdot 9) = A(m^2+m+17) \Leftrightarrow m^2+m-20=0$<br>$m = -5$ sau $m = 4$                                                                                                                                                     | 3p<br>2p |
| 2.a) | $f(1) = a+2$<br>$f(-1) = a-10 \Rightarrow f(1) - f(-1) = a+2 - a+10 = 12$                                                                                                                                                                        | 2p<br>3p |

|           |                                                                                                                                                                                                                                                             |                        |
|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| <b>b)</b> | Polinomul $f$ este divizibil cu polinomul $X - 2 \Leftrightarrow f(2) = 0$<br>$f(2) = a + 2$ , deci $a = -2$                                                                                                                                                | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>c)</b> | $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ , $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 5$<br>$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$ și $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6$ , deci pătratele rădăcinilor sunt 1, 1 și 4; cum $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ , obținem rădăcinile 1, 1 și 2, deci $a = -2$ , care convine | <b>2p</b><br><b>3p</b> |

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

|             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                        |
|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| <b>1.a)</b> | $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}} \cdot \ln x + \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x} =$<br>$= -\frac{\ln x}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}, x \in (0, +\infty)$                                                                                                             | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>b)</b>   | Tangenta la graficul funcției $f$ în punctul $(a, f(a))$ este perpendiculară pe axa $Oy \Leftrightarrow f'(a) = 0$<br>$2 - \ln a = 0 \Leftrightarrow a = e^2$                                                                                                                                                               | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>c)</b>   | $f'(x) > 0$ , pentru orice $x \in (0, e^2)$ , deci $f$ este strict crescătoare pe $(0, e^2)$<br>$0 < 2 < 3 < e^2 \Rightarrow f(2) < f(3) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \ln 2 < \frac{1}{\sqrt{3}} \ln 3 \Rightarrow \sqrt{3} \ln 2 < \sqrt{2} \ln 3$ , deci $2^{\sqrt{3}} < 3^{\sqrt{2}}$                                  | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>2.a)</b> | $\int_0^3 (4x - x^2) dx = \left( 2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big _0^3 =$<br>$= 18 - 9 = 9$                                                                                                                                                                                                                                | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>b)</b>   | $\int_1^2 \frac{2-x}{f(x)} dx = \int_1^2 \frac{2-x}{4x-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(4x-x^2) \Big _1^2 =$<br>$= \frac{1}{2} \ln 4 - \frac{1}{2} \ln 3 = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$                                                                                                                                            | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>c)</b>   | $I_{n+1} - 4I_n = \int_0^4 f^{n+1}(x) dx - 4 \int_0^4 f^n(x) dx = \int_0^4 f^n(x) (4x - x^2 - 4) dx = - \int_0^4 f^n(x) (x-2)^2 dx$<br>$f(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in [0, 4] \Rightarrow f^n(x) (x-2)^2 \geq 0$ , deci $I_{n+1} - 4I_n \leq 0 \Rightarrow I_{n+1} \leq 4I_n$ ,<br>pentru orice număr natural nenul $n$ | <b>3p</b><br><b>2p</b> |