

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că suma elementelor mulțimii $\{n \in \mathbb{N} \mid n(n+2) < 14\}$ este egală cu 3.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Determinați numerele reale a și b , știind că $f(0) = 1$ și $f(x+1) = f(x) + 2$, pentru orice număr real x .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $(x+5)^2 - 9 > 0$.
- 5p** 4. Determinați numărul submulțimilor ordonate cu două elemente ale mulțimii $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$, $B(3,5)$ și $C(-1,3)$. Determinați coordonatele simetricului punctului A față de mijlocul segmentului BC .
- 5p** 6. Calculați sinusul unghiului D al triunghiului DEF , știind că semiperimetrul triunghiului DEF este egal cu 6, $DE = 4$ și $DF = 5$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p** a) Arătați că $\det A = 2$.
- 5p** b) Determinați numerele reale x și y pentru care $A \cdot A \cdot A = xA + yI_3$.
- 5p** c) Determinați inversa matricei $B = A + I_3$.
2. Pe mulțimea $M = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = x^{2 \log_3 y}$.
- 5p** a) Arătați că $2 \circ 9 = 16$.
- 5p** b) Determinați numărul real x , $x \in M$ pentru care $x \circ 3 = 25$.
- 5p** c) Demonstrați că legea de compoziție „ $\circ$ ” este comutativă.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $e^{x-2} - x + 1 \geq 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \frac{1}{2}$.
- 5p** b) Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x) dx = 1$.
- 5p** c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$n(n+2) < 14$ și $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n=0$ sau $n=1$ sau $n=2$ Suma elementelor mulțimii este egală cu $0+1+2=3$	3p 2p
2.	$b=1$ $a(x+1)+1=ax+1+2$, pentru orice număr real $x \Rightarrow a=2$	2p 3p
3.	$(x+2)(x+8) > 0$ Mulțimea soluțiilor inecuației este $(-\infty, -8) \cup (-2, +\infty)$	2p 2p
4.	Numărul submulțimilor ordonate cu două elemente din $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ este egal cu $A_5^2 =$ $= 20$	3p 2p
5.	$M(1,4)$ este mijlocul segmentului BC Coordonatele simetricului punctului A față de punctul M sunt $x=2$ și $y=6$	2p 3p
6.	$EF=3$ $\triangle DEF$ este dreptunghic în E , deci $\sin D = \frac{3}{5}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+0-(-1)-(-1)-0 =$ $= 1+1=2$	3p 2p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x=1, y=2$	2p 3p
c)	$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = 2$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	2p 3p

2.a)	$2 \circ 9 = 2^{2 \log_3 9} = 2^{2 \cdot 2} =$ $= 2^4 = 16$	3p 2p
b)	$x^{2 \log_3 3} = 25 \Leftrightarrow x^2 = 25$ $x = -5$ care nu convine, $x = 5$ care convine	2p 3p
c)	$x \circ y = x^{2 \log_3 y} = x^{\log_3 y^2} = (y^2)^{\log_3 x} =$ $= y^{2 \log_3 x} = y \circ x$, pentru orice $x, y \in M$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(e^x)' \cdot (x-1) - e^x \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} =$ $= \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}, x \in (1, +\infty)$	2p 3p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ $x \in (1, 2] \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(1, 2]$ și $x \in [2, +\infty) \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[2, +\infty)$	2p 3p
c)	$f(x) \geq f(2)$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$ $f(2) = e^2$, deci $\frac{e^x}{x-1} \geq e^2 \Leftrightarrow \frac{e^{x-2}}{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow e^{x-2} - x + 1 \geq 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$	2p 3p
2.a)	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = -\cos x \Big _0^{\frac{\pi}{3}} =$ $= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$	3p 2p
b)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-\cos x)' dx = -x \cos x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx =$ $= -\frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} + 0 \cdot \cos 0 + \sin x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$	3p 2p
c)	$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} g^2(x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx =$ $= \frac{\pi}{2} x \Big _0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi}{4} \sin 2x \Big _0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi(\pi - 2)}{8}$	2p 3p