

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră numărul complex $z = 1 - 2i$. Arătați că $z^2 - 2z + 5 = 0$.
- 5p 2. Determinați numerele reale a și b , pentru care graficele funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + a$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = bx + 2$ se intersectează în punctul $M(2, 8)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(4x + 5) = 1 + \log_3(x + 3)$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele pare.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 2)$, $B(4, 1)$ și $C(0, 8)$. Determinați lungimea segmentului CM , știind că M este simetricul punctului A față de punctul B .
- 5p 6. Calculați aria paralelogramului $ABCD$, știind că $AB = 6$, $AC = 10$ și $m(\sphericalangle BAC) = \frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ (a+1)x - y + z = 0, \\ x + y - az = 1 \end{cases}$ unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(M(-1)) = 0$.
- 5p b) Determinați numerele reale a pentru care $\det(M(a)) = 0$.
- 5p c) Determinați numerele reale a , știind că sistemul are soluție unică (x_0, y_0, z_0) și $2x_0 + y_0z_0 = 0$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \frac{1}{10}xy - (x + y) + 20$.
- 5p a) Demonstrați că $x * y = \frac{1}{10}(x - 10)(y - 10) + 10$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x * x \leq \frac{101}{10}$.
- 5p c) Calculați $\log_2 1 * \log_2 2 * \log_2 3 * \dots * \log_2 2018$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 6\ln(x + 1)$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{6x^3}{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$.
- 5p b) Demonstrați că valoarea minimă a funcției f este 0.
- 5p c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{f(x)}}{x}$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 f(x)e^{-x} dx = \frac{11}{6}$.

5p | **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f are exact două puncte de inflexiune.

5p | **c)** Arătați că $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t f(x) dx = 1$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z^2 - 2z + 5 = (1 - 2i)^2 - 2(1 - 2i) + 5 =$ $= 1 - 4i + 4i^2 - 2 + 4i + 5 = 1 - 4 - 2 + 5 = 0$	2p 3p
2.	$M(2, 8) \in G_f \Rightarrow f(2) = 8 \Rightarrow 4 + a = 8 \Rightarrow a = 4$ $M(2, 8) \in G_g \Rightarrow g(2) = 8 \Rightarrow 2b + 2 = 8 \Rightarrow b = 3$	3p 2p
3.	$\log_3(4x + 5) = \log_3 3(x + 3) \Rightarrow 4x + 5 = 3x + 9$ $x = 4$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Numărul numerelor naturale de două cifre, care au cifrele pare este egal cu 20, deci sunt 20 de cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$	1p 2p 2p
5.	Punctul B este mijlocul segmentului AM , deci $M(6, 0)$ $CM = 10$	3p 2p
6.	$\mathcal{A}_{ABCD} = 2 \cdot \mathcal{A}_{\triangle ABC} = AB \cdot AC \cdot \sin(\angle BAC) = 6 \cdot 10 \cdot \sin \frac{\pi}{6} =$ $= 6 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 30$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$M(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(-1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= (-1) + 0 + 1 - (-1) - 0 - 1 = 0$	2p 3p
b)	$\det(M(a)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix} = (a+1)(a+2)$, pentru orice număr real a $a = -2$ sau $a = -1$	3p 2p
c)	Sistemul are soluție unică (x_0, y_0, z_0) , deci $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$ și soluția sistemului este $\left(\frac{2a}{(a+1)(a+2)}, \frac{2a^2 + 3a + 2}{(a+1)(a+2)}, \frac{1}{a+1} \right)$ $\frac{4a}{(a+1)(a+2)} + \frac{2a^2 + 3a + 2}{(a+1)^2(a+2)} = 0 \Leftrightarrow 6a^2 + 7a + 2 = 0$, deci $a = -\frac{2}{3}$ sau $a = -\frac{1}{2}$, care convin	2p 3p

2.a)	$x * y = \frac{1}{10}xy - x - y + 10 + 10 =$	2p
	$= \frac{1}{10}x(y-10) - (y-10) + 10 = \frac{1}{10}(x-10)(y-10) + 10$, pentru orice numere reale x și y	3p
b)	$\frac{1}{10}(x-10)^2 + 10 \leq \frac{101}{10} \Leftrightarrow (x-10)^2 \leq 1$	3p
	$x \in [9, 11]$	2p
c)	$x * 10 = 10$ și $10 * x = 10$, pentru orice număr real x	2p
	$\log_2 1 * \log_2 2 * \dots * \log_2 2018 = ((\log_2 1 * \dots * \log_2 1023) * 10) * \log_2 1025 * \dots * \log_2 2018 =$ $= 10 * (\log_2 1025 * \dots * \log_2 2018) = 10$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 6x^2 - 6x + 6 - \frac{6}{x+1} =$	3p
	$= \frac{6x^3 + 6x^2 - 6x^2 - 6x + 6x + 6 - 6}{x+1} = \frac{6x^3}{x+1}, x \in (-1, +\infty)$	2p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$	1p
	$f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-1, 0]$, deci f este descrescătoare pe $(-1, 0]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$, deci f este crescătoare pe $[0, +\infty)$	2p
	$f(x) \geq f(0)$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$ și, cum $f(0) = 0$, valoarea minimă a funcției f este 0	2p
c)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{x+1} = 0$	2p
	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{f(x)}}{ x } = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{f(x)}}{x} = 0$	3p
2.a)	$\int_0^1 f(x) e^{-x} dx = \int_0^1 (x^2 + x + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right) \Big _0^1 =$	3p
	$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 - 0 = \frac{11}{6}$	2p
b)	$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x) \Rightarrow F''(x) = (x^2 + 3x + 2)e^x, x \in \mathbb{R}$	2p
	$F''(-2) = 0, F''(-1) = 0, F''(x) > 0$ pentru orice $x \in (-\infty, -2), F''(x) < 0$ pentru orice $x \in (-2, -1)$ și $F''(x) > 0$ pentru orice $x \in (-1, +\infty)$, deci F are exact două puncte de inflexiune	3p
c)	$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F'(t)}{1} =$	3p
	$= \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 1$	2p