

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{tehnologic}}$

Varianta 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right) : \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{13}{5} = 1$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 4$. Determinați numărul real m , știind că $f(m+1) = m$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(2x+3) = \log_7 9$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$, acesta să fie multiplu de 3.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(4,1)$, $N(1,5)$ și $P(4,5)$. Calculați aria triunghiului MNP .
- 5p 6. Arătați că $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin 60^\circ + \sin^2 45^\circ = 1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ și $M(a) = \begin{pmatrix} 1+a & -a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det A = -2$.
- 5p b) Demonstrați că $M(a) \cdot M(b) = M(a+b)$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $M(1) \cdot X \cdot M(2) = A$.
2. Se consideră polinomul $f = 2X^3 - 4X^2 + 4X - 3$.
- 5p a) Arătați că $f(0) = -3$.
- 5p b) Demonstrați că numărul $a = \frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2} + \frac{3}{x_3}$ este natural, unde x_1 , x_2 și x_3 sunt rădăcinile lui f .
- 5p c) Demonstrați că polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^6 + 5}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{5(1-x^3)(1+x^3)}{(x^6+5)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$ situat pe graficul funcției f .
- 5p c) Determinați mulțimea valorilor funcției f .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)e^x$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x} dx = -\frac{1}{2}$.
- 5p b) Demonstrați că $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = (x-2)e^x + 2019$ este o primitivă a funcției f .
- 5p c) Calculați $\int_0^1 f^2(x) f'(x) dx$.

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Variantă 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right) : \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{13}{5} = \frac{5}{6} : \frac{13}{6} \cdot \frac{13}{5} =$	3p
	$= \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{13} \cdot \frac{13}{5} = 1$	2p
2.	$f(m+1) = 2(m+1) - 4 = 2m - 2$	3p
	$2m - 2 = m \Leftrightarrow m = 2$	2p
3.	$2x + 3 = 9 \Rightarrow 2x = 6$	3p
	$x = 3$, care convine	2p
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	2p
	În mulțimea A sunt 3 numere multiplu de 3, deci sunt 3 cazuri favorabile	2p
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$	1p
5.	$MP = 4$, $NP = 3$	2p
	$\triangle MPN$ este dreptunghic în P , deci $\mathcal{A}_{\triangle MPN} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$	3p
6.	$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	2p
	$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin 60^\circ + \sin^2 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$	3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 =$	3p
	$= 4 - 6 = -2$	2p
b)	$M(a) \cdot M(b) = \begin{pmatrix} 1+a & -a \\ a & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+b & -b \\ b & 1-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a+b & -b-a \\ a+b & 1-a-b \end{pmatrix} =$	3p
	$= \begin{pmatrix} 1+(a+b) & -(a+b) \\ a+b & 1-(a+b) \end{pmatrix} = M(a+b)$, pentru orice numere reale a și b	2p
c)	$M(a) \cdot M(-a) = M(0) = I_2 \Rightarrow (M(a))^{-1} = M(-a)$, pentru orice număr real a	2p
	$X = (M(1))^{-1} \cdot A \cdot (M(2))^{-1} \Rightarrow X = M(-1) \cdot A \cdot M(-2) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -11 & 18 \\ -17 & 28 \end{pmatrix}$	3p
2.a)	$f(0) = 2 \cdot 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 - 3 =$	3p
	$= 0 - 0 + 0 - 3 = -3$	2p

b)	$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2, \quad x_1x_2x_3 = \frac{3}{2}$	2p
	$a = \frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2} + \frac{3}{x_3} = \frac{3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)}{x_1x_2x_3} = 4$, care este număr natural	3p
c)	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 2^2 - 2 \cdot 2 = 0$	2p
	Dacă x_1, x_2 și x_3 sunt numere reale, atunci $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, ceea ce nu convine deoarece $f(0) = -3$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{x^6 + 5 - x \cdot 6x^5}{(x^6 + 5)^2} = \frac{5 - 5x^6}{(x^6 + 5)^2} =$	3p
	$= \frac{5(1 - x^6)}{(x^6 + 5)^2} = \frac{5(1 - x^3)(1 + x^3)}{(x^6 + 5)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$f(0) = 0, \quad f'(0) = \frac{1}{5}$	2p
	Ecuția tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, adică $y = \frac{1}{5}x$	3p
c)	$f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, -1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, -1]$, $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [-1, 1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1, 1]$ și $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1, +\infty)$	2p
	f continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $f(-1) = -\frac{1}{6}$, $f(1) = \frac{1}{6}$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, deci mulțimea valorilor funcției f este $\left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right]$	3p
2.a)	$\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x} dx = \int_0^1 (x-1) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big _0^1 =$	3p
	$= \frac{1}{2} - 1 - 0 = -\frac{1}{2}$	2p
b)	$F'(x) = ((x-2)e^x + 2019)' = 1 \cdot e^x + (x-2)e^x + 0 =$	3p
	$= (x-1)e^x = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$	2p
c)	$\int_0^1 f^2(x) f'(x) dx = \frac{f^3(x)}{3} \Big _0^1 =$	3p
	$= \frac{f^3(1) - f^3(0)}{3} = \frac{0 - (-1)}{3} = \frac{1}{3}$	2p