

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

5p	1. Determinați elementele mulțimii $M = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{3}{x+1} \in \mathbb{N} \right\}$.
5p	2. Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - mx - 1 = 0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m , știind că $\frac{x_1^2 - 1}{x_1} + \frac{x_2^2 - 1}{x_2} = 2$.
5p	3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2-x} - x = 0$.
5p	4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{\log_2 n \mid n \in \mathbb{N}^*, n \leq 20\}$, acesta să fie număr natural.
5p	5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(0,2)$ și $P(1,1)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului MP .
5p	6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 5\sqrt{2}$, $m(\sphericalangle A) = 45^\circ$ și $m(\sphericalangle C) = 30^\circ$. Determinați lungimea laturii BC .

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

5p	1. Se consideră matricea $M(m) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & m & -1 \\ m & 1 & 3 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + 2y + 4z = 5 \\ -x + my - z = -2 \\ mx + y + 3z = 4 \end{cases}$, unde m este număr real.
5p	a) Arătați că $\det(M(0)) = 3$.
5p	b) Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluție unică.
5p	c) Pentru $m = 1$, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care $4y_0^2 = (x_0 + z_0)^2$.
5p	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă, cu element neutru, $x * y = \frac{1}{3}xy - \frac{1}{2}(x + y) + \frac{9}{4}$.
5p	a) Demonstrați că $x * y = \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y .
5p	b) Determinați numerele reale x pentru care $x * x * x = x$.
5p	c) Demonstrați că nu există niciun număr natural n al cărui simetric în raport cu legea de compoziție „ $*$ ” să fie număr natural.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

5p	1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(x^2 + x + 1)$.
5p	a) Arătați că $f'(x) = \frac{x(x-1)}{x^2 + x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- 5p** b) Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y = -\frac{1}{7}x + 2$.
- 5p** c) Demonstrați că pentru fiecare număr natural nenul n , ecuația $f(x) + n = 0$ are soluție unică.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{e^x}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 e^x f(x) dx = 2$.
- 5p** b) Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = -1$ și $x = 1$ are aria egală cu $2 - \frac{2}{e}$.
- 5p** c) Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$. Demonstrați că
- $$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+2)I_n = \frac{1}{e}.$$

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică M_mate-info

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\frac{3}{x+1} \in \mathbb{N} \Rightarrow x+1=1$ sau $x+1=3$ Elementele mulțimii M sunt 0 și 2	3p 2p
2.	$x_1^2 - 1 = mx_1$, $x_2^2 - 1 = mx_2$, pentru orice număr real m $\frac{mx_1}{x_1} + \frac{mx_2}{x_2} = 2$, deci $m=1$	2p 3p
3.	$\sqrt{2-x} = x \Rightarrow 2-x = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$ $x = -2$, care nu convine sau $x = 1$, care convine	3p 2p
4.	În mulțimea A sunt 20 de numere, deci sunt 20 de cazuri posibile Pentru $n \leq 20$, obținem $\log_2 n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n \in \{1, 2, 4, 8, 16\}$, deci sunt 5 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$	1p 2p 2p
5.	$m_{MP} = -1$, deci panta mediatoarei segmentului MP este $m=1$ $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ este mijlocul lui MP , deci ecuația mediatoarei este $y - \frac{3}{2} = x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = x + 1$	2p 3p
6.	$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ $BC = 10$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$ $= 0 + (-4) + 0 - 0 - (-6) - (-1) = 3$	2p 3p
b)	$\det(M(m)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & m & -1 \\ m & 1 & 3 \end{vmatrix} = -4m^2 + m + 3$, pentru orice număr real m $\det(M(m)) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{4}$ sau $m = 1$, deci sistemul are soluție unică pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{4}, 1\right\}$	2p 3p
c)	Pentru $m=1$, sistemul este compatibil nedeterminat și soluțiile sistemului sunt $(3-2\alpha, 1-\alpha, \alpha)$, unde $\alpha \in \mathbb{C}$ $4(1-\alpha)^2 = (3-\alpha)^2 \Leftrightarrow \alpha = -1$ sau $\alpha = \frac{5}{3}$, deci soluțiile sunt $(5, 2, -1)$ sau $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$	3p 2p

2.a)	$x * y = \frac{1}{3}xy - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{4} + \frac{6}{4} =$	2p
	$= \frac{1}{3}x\left(y - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} = \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y	3p
b)	$x * x = \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$, $x * x * x = \frac{1}{9}\left(x - \frac{3}{2}\right)^3 + \frac{3}{2}$	2p
	$\frac{1}{9}\left(x - \frac{3}{2}\right)^3 + \frac{3}{2} = x \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$ sau $x = \frac{3}{2}$ sau $x = \frac{9}{2}$	3p
c)	$x * \frac{9}{2} = \frac{9}{2} * x = x$, pentru orice număr real x , deci $e = \frac{9}{2}$ este elementul neutru al legii „ $*$ ”	2p
	$n * n' = n' * n = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 4nn' - 6n - 6n' = 27$, unde n' este simetricul lui n și, cum pentru $n, n' \in \mathbb{N}$, numărul $4nn' - 6n - 6n'$ este par, obținem că nu există niciun număr natural n al cărui simetric în raport cu legea de compoziție „ $*$ ” să fie număr natural	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 1 - \frac{2x+1}{x^2+x+1} =$	3p
	$= \frac{x^2-x}{x^2+x+1} = \frac{x(x-1)}{x^2+x+1}$, $x \in \mathbb{R}$	2p
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a, f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y = -\frac{1}{7}x + 2 \Leftrightarrow f'(a) = -\frac{1}{7}$	2p
	$\frac{a(a-1)}{a^2+a+1} = -\frac{1}{7} \Leftrightarrow 8a^2 - 6a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$ sau $a = \frac{1}{2}$	3p
c)	f continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1 - \ln 3 \in (-1, 0)$	3p
	f este strict descrescătoare pe $(0, 1)$ și f este strict crescătoare pe $(1, +\infty)$, deci, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, ecuația $f(x) + n = 0$ nu are nicio soluție în $[0, +\infty)$	1p
	f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0) \Rightarrow$ pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, ecuația $f(x) + n = 0$ are soluție unică în $(-\infty, 0)$, deci pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, ecuația $f(x) + n = 0$ are soluție unică	1p
2.a)	$\int_0^2 e^x f(x) dx = \int_0^2 e^x \cdot \frac{x}{e^x} dx = \int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _0^2 =$	3p
	$= 2 - 0 = 2$	2p
b)	$\mathcal{A} = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 -xe^{-x} dx + \int_0^1 xe^{-x} dx = (x+1)e^{-x} \Big _{-1}^0 - (x+1)e^{-x} \Big _0^1 =$	3p
	$= 1 - \frac{2}{e} + 1 = 2 - \frac{2}{e}$	2p
c)	$(n+2)I_n = (n+2) \int_0^1 x^n f(x) dx = (n+2) \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx = \int_0^1 (x^{n+2})' e^{-x} dx = \frac{1}{e} + \int_0^1 x^{n+2} e^{-x} dx$	2p
	$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \leq e^{-x} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \cdot x^{n+2} \leq x^{n+2} e^{-x} \leq x^{n+2} \Rightarrow \frac{1}{e} \int_0^1 x^{n+2} dx \leq \int_0^1 x^{n+2} e^{-x} dx \leq \int_0^1 x^{n+2} dx$	1p
	Cum $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^{n+2} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+3} = 0$, obținem $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^{n+2} e^{-x} dx = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+2)I_n = \frac{1}{e}$	2p