

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| 5p | 1. Arătați că numărul $a = \left(\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i} \right)^2$ este întreg, unde $i^2 = -1$. |
| 5p | 2. Determinați cel mai mare număr natural m pentru care soluțiile ecuației $x^2 - 7x + m = 0$ sunt numere reale. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 117$. |
| 5p | 4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 36 de submulțimi cu două elemente. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(3,-3)$ și $C(3,0)$. Determinați ecuația medianei din C a triunghiului ABC . |
| 5p | 6. Determinați $x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ pentru care $\cos x \sin(\pi - x) - \sin x \cos(\pi + x) = 1$. |

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 3 & 2a-1 & 1 \\ a-3 & a & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + ay + z = 1 \\ 3x + (2a-1)y + z = 1 \\ (a-3)x + ay + z = 2a-1 \end{cases}$,
unde a este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $\det(A(0)) = -5$. |
| 5p | b) Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a)) = 0$. |
| 5p | c) Pentru $a = 1$, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2 = y_0 z_0$. |
| | 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 5xy - 5(x+y) + 6$. |
| 5p | a) Demonstrați că $x * y = 5(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y . |
| 5p | b) Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x * x * x < 26$. |
| 5p | c) Determinați numărul natural nenul n pentru care $\frac{1}{n^2} * \frac{1}{(n+1)^2} * \frac{1}{(n+2)^2} = -19$. |

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| | 1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x}$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = \frac{x-2}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$. |
| 5p | b) Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este perpendiculară pe dreapta de ecuație $y = x$. |
| 5p | c) Demonstrați că $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$. |

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$.

5p a) Arătați că $\int_0^3 f(x) dx = 12$.

5p b) Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

5p c) Demonstrați că există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f(t)} dt = x$.

Examenul de bacalaureat național 2019

**Proba E. c)
Matematică M_șt-nat**

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i} = \frac{(1+i)-(1-i)}{1^2-i^2} = \frac{2i}{2} = i$ $a = i^2 = -1$, care este număr întreg	3p 2p
2.	$\Delta = 49 - 4m$ $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty, \frac{49}{4}\right]$, deci cel mai mare număr natural m pentru care soluțiile ecuației sunt numere reale este 12	2p 3p
3.	$3^x(1+3+3^2) = 117 \Leftrightarrow 3^x = 9$ $x = 2$	3p 2p
4.	$C_n^2 = 36$, unde n este numărul de elemente ale mulțimii $\frac{n(n-1)}{2} = 36$, deci $n = 9$	3p 2p
5.	Mijlocul segmentului AB este punctul $M(1, -1)$ Ecuația medianei din C este $y+1 = \frac{1}{2}(x-1)$, deci $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$	2p 3p
6.	$\cos x \sin x + \sin x \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 1$ Cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x = \frac{\pi}{4}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= -2 + 0 + 0 - 3 - 0 - 0 = -5$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 3 & 2a-1 & 1 \\ a-3 & a & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 6a - 5$, pentru orice număr real a $a = 1$ sau $a = 5$	3p 2p
c)	Pentru $a = 1$, sistemul este $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x + y + z = 1 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases}$ și, scăzând primele două ecuații, obținem $x_0 = 0$, deci $y_0 + z_0 = 1$ $x_0^2 = y_0 z_0 \Rightarrow y_0 z_0 = 0$, deci soluțiile sunt $(0, 1, 0)$ sau $(0, 0, 1)$, care convin	3p 2p

2.a)	$x * y = 5xy - 5x - 5y + 5 + 1 =$ $= 5x(y-1) - 5(y-1) + 1 = 5(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
b)	$x * x = 5(x-1)^2 + 1$, $x * x * x = 25(x-1)^3 + 1$ $(x-1)^3 < 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2)$	2p 3p
c)	$25\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}+1\right)\left(\frac{1}{n+1}-1\right)\left(\frac{1}{n+1}+1\right)\left(\frac{1}{n+2}-1\right)\left(\frac{1}{n+2}+1\right)+1=-19 \Leftrightarrow \frac{(1-n)(n+3)}{n(n+2)}=-\frac{4}{5}$ Cum n este număr natural nenul, obținem $n = 3$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2x-2(x-1)}{x^2} =$ $= \frac{x-2x+2x-2}{x^2} = \frac{x-2}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a, f(a))$ este perpendiculară pe dreapta de ecuație $y = x \Leftrightarrow f'(a) = -1$ $\frac{a-2}{a^2} = -1 \Leftrightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$, care nu convine sau $a = 1$, care convine	3p 2p
c)	$f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (0, 2) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0, 2)$ $0 < 1 < \frac{\pi}{2} < 2 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(1)$ și, cum $f(1) = 0$, obținem $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$	2p 3p
2.a)	$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big _0^3 =$ $= \frac{27}{3} + 3 - 0 = 12$	3p 2p
b)	$g(x) = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow \mathcal{A} = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1)\Big _0^1 =$ $= \frac{1}{2} \ln 2$	3p 2p
c)	Funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \int_0^x e^{f(t)} dt - x$ este derivabilă și $h'(x) = e^{x^2+1} - 1$ $h'(x) > 0$ pentru orice număr real x , deci h este strict crescătoare pe $\mathbb{R} \Rightarrow h$ este injectivă și, cum $h(0) = 0$, există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f(t)} dt = x$	2p 3p