

**Examenul de bacalaureat național 2020**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{tehnologic}$**

**Model**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p 1. Arătați că  $(10 - 2 \cdot 3)(10 + 2 \cdot 3) = 64$ .
- 5p 2. Se consideră  $x_1$  și  $x_2$  soluțiile ecuației  $x^2 - 7x + 10 = 0$ . Arătați că  $2(x_1 + x_2) - x_1 x_2 = 4$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_2(x - 2020) = 2 \log_2 3$ .
- 5p 4. Un obiect costă 200 de lei. Determinați prețul obiectului după o scumpire cu 10%.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2, 4)$  și  $B(4, 4)$ . Calculați distanța de la punctul  $O(0, 0)$  la mijlocul segmentului  $AB$ .
- 5p 6. Arătați că  $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  și  $B(x) = \begin{pmatrix} x & -3x \\ 0 & x \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det A = 4$ .
- 5p b) Determinați numărul real  $x$  pentru care  $B(x) \cdot B(-x) + B(x) = A$ .
- 5p c) Rezolvați în  $M_2(\mathbb{R})$  ecuația  $B(1) \cdot X = A$ .
2. Pe mulțimea  $M = (0, +\infty)$  se definește legea de compoziție  $x \circ y = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ .
- 5p a) Arătați că  $3 \circ \frac{1}{3} = \frac{82}{9}$ .
- 5p b) Demonstrați că  $x \circ y \geq 2$ , pentru orice  $x, y \in M$ .
- 5p c) Determinați  $a \in M$ , pentru care  $a^2 \circ \frac{1}{a^2} = 2$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x(x^2 - 12) + 3$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = 3(x - 2)(x + 2)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + 6}{x - 3} = 15$ .
- 5p c) Demonstrați că  $-13 \leq f(x) \leq 19$ , pentru orice  $x \in [-2, 2]$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^5 + x + 1$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_{-1}^1 (f(x) - x^5 - 1) dx = 0$ .
- 5p b) Calculați  $\int_0^1 x^{2020} (f(x) - x - 1) dx$ .
- 5p c) Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$  a graficului funcției  $g: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x} (f(x) - x^5)$  este egal cu  $\pi \left( 2 \ln 2 + \frac{3}{2} \right)$ .

**Examenul de bacalaureat național 2020**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{tehnologic}$**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Model**

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

|           |                                                                                                                                                                                                                       |                        |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| <b>1.</b> | $10 - 2 \cdot 3 = 4$<br>$10 + 2 \cdot 3 = 16 \Rightarrow (10 - 2 \cdot 3)(10 + 2 \cdot 3) = 4 \cdot 16 = 64$                                                                                                          | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>2.</b> | $x_1 + x_2 = 7$<br>$x_1 x_2 = 10 \Rightarrow 2(x_1 + x_2) - x_1 x_2 = 14 - 10 = 4$                                                                                                                                    | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>3.</b> | $\log_2(x - 2020) = \log_2 3^2 \Rightarrow x - 2020 = 9$<br>$x = 2029$ , care convine                                                                                                                                 | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>4.</b> | 10% din 200 reprezintă $\frac{10}{100} \cdot 200 = 20$<br>Prețul după scumpire este $200 + 20 = 220$ de lei                                                                                                           | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>5.</b> | Mijlocul segmentului $AB$ este punctul $M(3, 4)$<br>$OM = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = 5$                                                                                                                               | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>6.</b> | $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$<br>$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 60^\circ + \cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ | <b>2p</b><br><b>3p</b> |

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

|             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                        |
|-------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| <b>1.a)</b> | $\det A = \begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-2) - 0 \cdot 9 =$<br>$= 4 - 0 = 4$                                                                                                                                                                                                                                           | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>b)</b>   | $B(x) \cdot B(-x) = \begin{pmatrix} -x^2 & 6x^2 \\ 0 & -x^2 \end{pmatrix}$ , $B(x) \cdot B(-x) + B(x) = \begin{pmatrix} -x^2 + x & 6x^2 - 3x \\ 0 & -x^2 + x \end{pmatrix}$ , $x \in \mathbb{R}$<br>$\begin{pmatrix} -x^2 + x & 6x^2 - 3x \\ 0 & -x^2 + x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ , de unde obținem $x = -1$ | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>c)</b>   | $B(1) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , $\det(B(1)) = 1$ , $(B(1))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$<br>$X = (B(1))^{-1} \cdot A \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$                                                                                                                 | <b>3p</b><br><b>2p</b> |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                      |              |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 2.a) | $3 \circ \frac{1}{3} = \frac{9 + \frac{1}{9}}{3 \cdot \frac{1}{3}} =$ $= 9 + \frac{1}{9} = \frac{82}{9}$                                                                                                                                                             | 3p<br><br>2p |
| b)   | $x \circ y - 2 = \frac{x^2 + y^2}{xy} - 2 = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{xy} = \frac{(x - y)^2}{xy}$ <p>Cum <math>x &gt; 0</math>, <math>y &gt; 0</math> și <math>(x - y)^2 \geq 0</math>, obținem <math>x \circ y \geq 2</math>, pentru orice <math>x, y \in M</math></p> | 3p<br><br>2p |
| c)   | $a^4 + \frac{1}{a^4} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)^2 = 0, \text{ deci } a^4 = 1$ <p><math>a = -1</math>, care nu convine, <math>a = 1</math>, care convine</p>                                                                            | 3p<br><br>2p |

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                |              |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 1.a) | $f'(x) = (x^3 - 12x + 3)' = 3x^2 - 12 =$ $= 3(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 2), \quad x \in \mathbb{R}$                                                                                                                                                                              | 3p<br><br>2p |
| b)   | $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - (-6)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3) =$ $= 3(3 - 2)(3 + 2) = 15$                                                                                                                                       | 3p<br><br>2p |
| c)   | <p><math>x \in [-2, 2] \Rightarrow f'(x) \leq 0</math>, deci <math>f</math> este descrescătoare pe <math>[-2, 2]</math></p> <p>Cum <math>f(-2) = 19</math> și <math>f(2) = -13</math>, obținem <math>-13 \leq f(x) \leq 19</math>, pentru orice <math>x \in [-2, 2]</math></p> | 2p<br><br>3p |
| 2.a) | $\int_{-1}^1 (f(x) - x^5 - 1) dx = \int_{-1}^1 (x^5 + x + 1 - x^5 - 1) dx = \int_{-1}^1 x dx =$ $= \frac{x^2}{2} \Big _{-1}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$                                                                                                                 | 2p<br><br>3p |
| b)   | $\int_0^1 x^{2020} (f(x) - x - 1) dx = \int_0^1 x^{2025} dx = \frac{x^{2026}}{2026} \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{2026}$                                                                                                                                                            | 3p<br><br>2p |
| c)   | $g(x) = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow V = \pi \int_1^2 g^2(x) dx = \pi \int_1^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx =$ $= \pi \left(x + 2 \ln x - \frac{1}{x}\right) \Big _1^2 = \pi \left(2 \ln 2 + \frac{3}{2}\right)$                                             | 2p<br><br>3p |