

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $\log_2 7 + \log_2 6 - \log_2 21 = 1$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 1$. Demonstrați că $f(x) \geq g(x)$, pentru orice număr real x .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 12} = 2x$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr x din mulțimea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, acesta să fie soluție a ecuației $x^2 - 3x + 2 = 0$.
- 5p 5. Determinați numerele reale a și b , pentru care $\vec{u} = 3\vec{v}$, unde $\vec{u} = a\vec{i} + 6\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + b\vec{j}$.
- 5p 6. Se consideră expresia $E(x) = \sin^2 x - \cos^2 x + \sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 2$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & x+3 \\ x-3 & x-2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(x)) = 5$, pentru orice număr real x .
- 5p b) Determinați numărul natural n astfel încât $A(-3) + A(-2) + A(-1) + A(1) + A(2) + A(3) = nA(0)$.
- 5p c) Determinați numărul real x pentru care $A(x) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \frac{x + y + 1}{x^2 + y^2 + 1}$.
- 5p a) Arătați că $0 * 1 = 1$.
- 5p b) Determinați numerele reale x pentru care $x * x = 1$.
- 5p c) Demonstrați că $x * (-x) \leq 1$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x^2 + 2x + 2}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{2x^2 + 3x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$.
- 5p c) Demonstrați că, pentru orice număr real a , ecuația $f(x) = a$ are cel puțin o soluție.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x + x$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) - xe^x) dx = \frac{1}{2}$.
- 5p b) Arătați că $\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot f(x^2) dx = \frac{e^4 - e + 3}{2}$.
- 5p c) Se consideră $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $F(1) = 0$. Arătați că $\int_0^1 F(x) dx = \frac{5 - 3e}{3}$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Variantă 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\log_2 7 + \log_2 6 - \log_2 21 = \log_2 \frac{7 \cdot 6}{21} =$ $= \log_2 2 = 1$	3p 2p
2.	$f(x) - g(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, pentru orice număr real x $(x-1)^2 \geq 0$, pentru orice număr real x , deci $f(x) \geq g(x)$, pentru orice număr real x	3p 2p
3.	$x^2 + 12 = 4x^2 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 4$ $x = -2$, care nu convine, $x = 2$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea A are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ sau $x = 2$, care sunt elemente ale mulțimii A , deci avem 2 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{2}{5}$	2p 2p 1p
5.	$\vec{u} = 3\vec{v} \Leftrightarrow a\vec{i} + 6\vec{j} = 6\vec{i} + 3b\vec{j}$ $a = 6$, $b = 2$	3p 2p
6.	$E\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{4} + \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right) - 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 2 =$ $= \sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{2} - 2 = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} x+2 & x+3 \\ x-3 & x-2 \end{vmatrix} = x^2 - 4 - (x^2 - 9) =$ $= x^2 - 4 - x^2 + 9 = 5$, pentru orice număr real x	3p 2p
b)	$A(-3) + A(3) = A(-2) + A(2) = A(-1) + A(1) = 2A(0)$ $2A(0) + 2A(0) + 2A(0) = nA(0)$, de unde obținem $n = 6$	3p 2p
c)	$A(1) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A(x) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} x & 3x+5 \\ x-5 & 3x-10 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $\begin{pmatrix} x & 3x+5 \\ x-5 & 3x-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$, de unde obținem $x = 1$	3p 2p
2.a)	$0 * 1 = \frac{0+1+1}{0^2+1^2+1} =$ $= \frac{2}{2} = 1$	3p 2p

b)	$x * x = \frac{2x+1}{2x^2+1}$, pentru orice număr real x	2p
	$\frac{2x+1}{2x^2+1} = 1 \Leftrightarrow 2x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ sau } x = 1$	3p
c)	$x * (-x) = \frac{x+(-x)+1}{x^2+(-x)^2+1} = \frac{1}{2x^2+1}$, pentru orice număr real x	2p
	$x * (-x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2x^2+1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-2x^2}{2x^2+1} \leq 0$ inegalitate adevărată pentru orice număr real x	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \sqrt{x^2+2x+2} + x \cdot \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}} =$	3p
	$= \frac{x^2+2x+2+x^2+x}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{2x^2+3x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}, x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2+3x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x^2+2x+2}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+3x+2}{x^3+2x^2+2x} =$	3p
	$= 0$	2p
c)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x\sqrt{x^2+2x+2} = -\infty$	2p
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x^2+2x+2} = +\infty$ și, cum f este funcție continuă, obținem că, pentru orice număr real a , ecuația $f(x) = a$ are cel puțin o soluție	3p
2.a)	$\int_0^1 (f(x) - xe^x) dx = \int_0^1 (xe^x + x - xe^x) dx = \int_0^1 x dx =$	2p
	$= \frac{x^2}{2} \Big _0^1 = \frac{1}{2}$	3p
b)	$\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot f(x^2) dx = \int_1^2 \frac{x^2 e^{x^2} + x^2}{x} dx = \int_1^2 x e^{x^2} dx + \int_1^2 x dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big _1^2 + \frac{x^2}{2} \Big _1^2 =$	3p
	$= \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} e + \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^4 - e + 3}{2}$	2p
c)	$\int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 x' F(x) dx = xF(x) \Big _0^1 - \int_0^1 x f(x) dx = F(1) - \int_0^1 (x^2 e^x + x^2) dx =$	3p
	$= - \left((x^2 - 2x + 2) e^x + \frac{x^3}{3} \right) \Big _0^1 = - \left(e + \frac{1}{3} - 2 \right) = \frac{5-3e}{3}$	2p