

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M\_mate-info*

Model

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul  $N = \log_2 6 - 2\log_2 3 + \log_2 24$  este natural.
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - x + 2$ . Arătați că dreapta de ecuație  $y = 2$  intersectează graficul funcției  $f$  în două puncte distincte.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{x^2 - 5} = \sqrt{3x - 1}$ .
- 5p 4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi  $A$ , știind că mulțimea  $A$  are exact 15 submulțimi cu două elemente.
- 5p 5. Se consideră triunghiul  $ABC$  și punctele  $M$ ,  $N$  și  $P$  mijloacele segmentelor  $BC$ ,  $BM$ , respectiv  $CM$ . Arătați că  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ .
- 5p 6. Determinați  $x \in (0, \pi)$ , știind că  $\sin 2x + 2\sin^2 x = 0$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea  $A(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}$ , unde  $a$ ,  $b$  și  $c$  sunt numere reale.
- 5p a) Arătați că  $\det(A(0, 1, 2)) = 2$ .
- 5p b) Demonstrați că  $\det(A(a, b, c)) = (b - a)(c - a)(c - b)$ , pentru orice numere reale  $a$ ,  $b$  și  $c$ .
- 5p c) Demonstrați că, dacă  $m$ ,  $n$  și  $p$  sunt numere naturale, cu  $m < n < p$ , astfel încât determinantul matricei  $A(m, n, p)$  este număr prim, atunci numerele  $m$ ,  $n$  și  $p$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2. În mulțimea  $\mathbb{Z}_3[X]$ , se consideră polinomul  $f = X^4 + aX^3 + \hat{2}X + b$ , unde  $a, b \in \mathbb{Z}_3$ .
- 5p a) Pentru  $a = \hat{1}$  și  $b = \hat{2}$ , arătați că  $f(\hat{0}) + f(\hat{2}) = \hat{2}$ .
- 5p b) Determinați perechile  $(a, b)$ , cu  $a, b \in \mathbb{Z}_3$ , pentru care polinomul  $f$  este divizibil cu  $X + \hat{2}$ .
- 5p c) Arătați că, pentru orice  $a, b \in \mathbb{Z}_3$ , există  $x, y \in \mathbb{Z}_3$ , cu  $x \neq y$ , astfel încât  $f(x) = f(y)$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 2}$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{e^x(e^x + 2x + 2)}{(e^x + 2)^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Arătați că dreapta de ecuație  $y = x$  este asimptotă oblică spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Demonstrați că funcția  $f$  are un unic punct de extrem.

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2(x+3)}{\sqrt{x^2+4x+5}}$ .

5p a) Arătați că  $\int_0^1 f(x) \sqrt{x^2+4x+5} dx = 7$ .

5p b) Arătați că  $\int_0^1 (f^2(x) - 4) dx = 4 \ln 2$ .

5p c) Se consideră numerele reale  $a$  și  $b$ , cu  $0 \leq a < b$ . Pentru fiecare număr natural nenul  $n$ , se consideră numărul  $I_n = \int_a^b f^n(x) dx$ . Demonstrați că  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$ .

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**  
**Matematică M\_mate-info**  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Model**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |          |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 1. | $N = \log_2 6 - \log_2 9 + \log_2 24 = \log_2 \frac{6 \cdot 24}{9} =$<br>$= \log_2 16 = 4$ , care este număr natural                                                                                                                                                                                                                                                                      | 3p<br>2p |
| 2. | $f(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0$<br>Cum ecuația $x^2 - x = 0$ are două soluții reale și distincte, obținem că dreapta $y = 2$ intersectează graficul funcției $f$ în două puncte distincte                                                                                                                                                          | 2p<br>3p |
| 3. | $x^2 - 5 = 3x - 1 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$<br>$x = -1$ , care nu convine, $x = 4$ , care convine                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 2p<br>3p |
| 4. | Mulțimea $A$ are $C_n^2$ submulțimi cu 2 elemente, unde $n \in \mathbb{N}$ , $n \geq 2$ , este numărul de elemente ale lui $A$<br>$C_n^2 = 15$ , deci $\frac{n(n-1)}{2} = 15$ , de unde obținem că mulțimea $A$ are 6 elemente                                                                                                                                                            | 2p<br>3p |
| 5. | $M$ mijlocul lui $BC \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$<br>$M$ mijlocul lui $NP \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP})$ , deci $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ | 2p<br>3p |
| 6. | $2\sin x \cos x + 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x(\cos x + \sin x) = 0$<br>Cum $x \in (0, \pi)$ , obținem $x = \frac{3\pi}{4}$                                                                                                                                                                                                                                                      | 2p<br>3p |

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |          |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 1.a) | $A(0,1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0,1,2)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$<br>$= 0 + 0 + 4 - 2 - 0 - 0 = 2$                                                                                                                 | 2p<br>3p |
| b)   | $\det(A(a,b,c)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ bc & ac-bc & ab-bc \end{vmatrix} =$<br>$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ bc & -c(b-a) & -b(c-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$ , pentru orice numere reale $a, b$ și $c$ | 2p<br>3p |
| c)   | $\det(A(m,n,p)) = (n-m)(p-m)(p-n)$ și, cum $m, n$ și $p$ sunt numere naturale, cu $m < n < p$ , obținem $p-m > p-n > 0$ și $p-m > n-m > 0$<br>Cum $\det(A(m,n,p))$ este număr prim, obținem $p-n = n-m = 1$ , deci numerele $m, n$ și $p$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice                                  | 3p<br>2p |

Probă scrisă la matematică M\_mate-info

Model

Barem de evaluare și de notare

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |    |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.a) | $f = X^4 + X^3 + 2X + 2$ , deci $f(\hat{0}) = \hat{2}$ și $f(\hat{2}) = \hat{0}$                                                                                                                                                                                                                                    | 3p |
|      | $f(\hat{0}) + f(\hat{2}) = \hat{2} + \hat{0} = \hat{2}$                                                                                                                                                                                                                                                             | 2p |
| b)   | $f$ este divizibil cu $X + \hat{2} \Leftrightarrow f(\hat{1}) = \hat{0}$ , deci $a + b = \hat{0}$                                                                                                                                                                                                                   | 3p |
|      | Cum $a, b \in \mathbb{Z}_3$ , perechile sunt $(\hat{0}, \hat{0})$ , $(\hat{1}, \hat{2})$ și $(\hat{2}, \hat{1})$                                                                                                                                                                                                    | 2p |
| c)   | $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = \hat{2}$ , pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}_3$                                                                                                                                                                                                                             | 3p |
|      | Dacă $f(\hat{0})$ , $f(\hat{1})$ și $f(\hat{2})$ ar fi distincte două câte două, atunci $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = \hat{0} + \hat{1} + \hat{2} = \hat{0}$ , ceea ce este fals, deci pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}_3$ , există $x, y \in \mathbb{Z}_3$ , cu $x \neq y$ , astfel încât $f(x) = f(y)$ | 2p |

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |    |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.a) | $f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(e^x + 2) - xe^{2x}}{(e^x + 2)^2} =$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 3p |
|      | $= \frac{e^{2x} + 2e^x + 2xe^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{e^x(e^x + 2x + 2)}{(e^x + 2)^2}, x \in \mathbb{R}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 2p |
| b)   | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 2} = 1$                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 2p |
|      | $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x - x(e^x + 2)}{e^x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{e^x + 2} = 0$ , deci dreapta de ecuație $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției $f$                                                                                                                                         | 3p |
| c)   | $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = e^x + 2x + 2$ este strict crescătoare și, cum $g$ este continuă, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$                                                                                                                                                                                                                                              | 3p |
|      | și $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , există un unic număr real $c$ , astfel încât $g(c) = 0$<br>$f'(x) < 0$ , pentru orice $x \in (-\infty, c) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, c)$ și $f'(x) > 0$ , pentru orice $x \in (c, +\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(c, +\infty)$ și, cum $f$ este continuă, obținem că $f$ are un unic punct de extrem | 2p |
| 2.a) | $\int_0^1 f(x) \sqrt{x^2 + 4x + 5} dx = \int_0^1 2(x + 3) dx = (x^2 + 6x) \Big _0^1 =$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 3p |
|      | $= 1 + 6 - 0 - 0 = 7$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 2p |
| b)   | $\int_0^1 (f^2(x) - 4) dx = \int_0^1 \frac{4(x + 3)^2 - 4(x^2 + 4x + 5)}{x^2 + 4x + 5} dx = 4 \int_0^1 \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 5} dx =$                                                                                                                                                                                                                                                                  | 2p |
|      | $= 4 \int_0^1 \frac{(x^2 + 4x + 5)'}{x^2 + 4x + 5} dx = 4 \ln(x^2 + 4x + 5) \Big _0^1 = 4 \ln 2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 3p |
| c)   | Cum $f^2(x) - 4 = \frac{4(2x + 4)}{x^2 + 4x + 5} \geq 0$ și $f(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in [0, +\infty)$ , obținem $f(x) \geq 2$ , deci $f^n(x) \geq 2^n$ , pentru orice $x \in [0, +\infty)$ și orice număr natural nenul $n$                                                                                                                                                                       | 2p |
|      | Cum $0 \leq a < b$ , $I_n = \int_a^b f^n(x) dx \geq 2^n(b - a)$ , pentru orice număr natural nenul $n$ și, cum $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ , obținem că $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$                                                                                                                                                                                     | 3p |