

**Examenul național de bacalaureat 2022**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{mate-info}}$**

**Varianta 3**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că  $5(1+2i) - 2i(5-i) = 3$ , unde  $i^2 = -1$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2x - 3$ . Determinați numărul real  $a$  pentru care  $f(a) = 1 + a^2$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_3(2x^2 + 1) = 2$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele impare și distincte.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2,0)$ ,  $B(1,6)$  și  $C(4,2)$ . Determinați coordonatele punctului  $D$ , știind că  $\overline{AB} = \overline{DC}$ .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul  $ABC$ , dreptunghic în  $A$ , astfel încât  $BC = 10$  și  $\sin B = 2 \sin C$ . Arătați că lungimea laturii  $AB$  este egală cu  $2\sqrt{5}$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  și  $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & -x & 0 \\ x & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , unde  $x$  este număr real.
- 5p** a) Arătați că  $\det(A(1)) = 1$ .
- 5p** b) Arătați că  $(A(x) - I_3)(A(x) - I_3) = O_3$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p** c) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $A(x) \cdot A(x) = xA(x) - (x-1)I_3$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = (x+y)^2 - 2(x-y) - 3$ .
- 5p** a) Arătați că  $0 * 2 = 5$ .
- 5p** b) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $x * (x+1) = 8$ .
- 5p** c) Determinați perechile  $(m, n)$  de numere naturale pentru care  $m * n = 2mn$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^2 - 5x + 10)\sqrt{x}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{5(x^2 - 3x + 2)}{2\sqrt{x}}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p** b) Determinați intervalele de monotonie a funcției  $f$ .
- 5p** c) Arătați că  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x^2\sqrt{x}} \right)^{\frac{x}{5}} = \frac{1}{e}$ .

2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + e^x + \frac{1}{e^x + 1}$ .

5p a) Arătați că  $\int_0^2 \left( f(x) - \frac{1}{e^x + 1} \right) dx = e^2 + 1$ .

5p b) Arătați că  $\int_{-1}^1 e^x (f(x) - x - e^x) dx = 1$ .

5p c) Determinați numărul real  $m$  pentru care  $\int_0^1 x(f(x) + f(-x)) dx = \frac{m}{2} - \frac{2}{e}$ .

**Examenul național de bacalaureat 2022**  
**Proba E. c)**  
**Matematică  $M_{\text{mate-info}}$**   
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianța 3**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

|           |                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                        |
|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| <b>1.</b> | $5(1+2i) - 2i(5-i) = 5+10i-10i+2i^2 =$<br>$= 5+2 \cdot (-1) = 3$                                                                                                                                                                                                                          | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>2.</b> | $f(a) = a^2 - 2a - 3$ , deci $a^2 - 2a - 3 = 1 + a^2$<br>$-2a = 4$ , de unde obținem $a = -2$                                                                                                                                                                                             | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>3.</b> | $2x^2 + 1 = 3^2 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$<br>$x = -2$ sau $x = 2$ , care convin                                                                                                                                                                                                            | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>4.</b> | Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile<br>În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 20 de numere care au cifrele impare și distincte, deci sunt 20 de cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$ | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>5.</b> | $\overline{AB} = \overline{DC} \Rightarrow ABCD$ este paralelogram, deci segmentele $AC$ și $BD$ au același mijloc<br>Mijlocul segmentului $AC$ are coordonatele $(3,1)$ , de unde obținem $D(5,-4)$                                                                                      | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>6.</b> | $\sin B = \frac{AC}{BC}$ , $\sin C = \frac{AB}{BC}$ , deci $AC = 2AB$<br>Cum $AB^2 + AC^2 = 100$ , obținem $AB = 2\sqrt{5}$                                                                                                                                                               | <b>2p</b><br><b>3p</b> |

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

|             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                        |
|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| <b>1.a)</b> | $A(1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$<br>$= 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - (-1) = 1$                                                                                                                                                | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>b)</b>   | $A(x) - I_3 = \begin{pmatrix} x & -x & 0 \\ x & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , pentru orice număr real $x$<br>$(A(x) - I_3)(A(x) - I_3) = \begin{pmatrix} x^2 - x^2 & -x^2 + x^2 & 0 \\ x^2 - x^2 & -x^2 + x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$ , pentru orice număr real $x$ | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>c)</b>   | $A(x) \cdot A(x) = 2A(x) - I_3$ , pentru orice număr real $x$<br>$2A(x) - I_3 = xA(x) - (x-1)I_3 \Leftrightarrow (x-2)(A(x) - I_3) = O_3$ , de unde obținem $x = 0$ sau $x = 2$                                                                                                                                                                              | <b>2p</b><br><b>3p</b> |

|             |                                                                                                                                                                                                        |                        |
|-------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| <b>2.a)</b> | $0 * 2 = (0 + 2)^2 - 2(0 - 2) - 3 =$<br>$= 4 + 4 - 3 = 5$                                                                                                                                              | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>b)</b>   | $x * (x + 1) = 4x^2 + 4x$ , pentru orice număr real $x$<br>$4x^2 + 4x = 8 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$ , de unde obținem $x = -2$ sau $x = 1$                                                      | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>c)</b>   | $(m + n)^2 - 2(m - n) - 3 = 2mn \Leftrightarrow m^2 + n^2 - 2m + 2n - 3 = 0$<br>$(m - 1)^2 + (n + 1)^2 = 5$ și, cum $m$ și $n$ sunt numere naturale, obținem perechile $(0, 1)$ , $(2, 1)$ și $(3, 0)$ | <b>2p</b><br><b>3p</b> |

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

|             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                        |
|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| <b>1.a)</b> | $f'(x) = (2x - 5)\sqrt{x} + (x^2 - 5x + 10) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$<br>$= \frac{5x^2 - 15x + 10}{2\sqrt{x}} = \frac{5(x^2 - 3x + 2)}{2\sqrt{x}}, x \in (0, +\infty)$                                                                                                                                                                                                   | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>b)</b>   | $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ sau $x = 2$<br>$f'(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in (0, 1]$ , deci $f$ este crescătoare pe $(0, 1]$ , $f'(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in [1, 2]$ , deci $f$ este descrescătoare pe $[1, 2]$ și $f'(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in [2, +\infty)$ , deci $f$ este crescătoare pe $[2, +\infty)$                                         | <b>2p</b><br><b>3p</b> |
| <b>c)</b>   | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x^2 \sqrt{x}} \right)^{\frac{x}{5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2} \right)^{\frac{x}{5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{-5x + 10}{x^2} \right)^{\frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{x}{5}} =$<br>$= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x + 10}{5x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$ | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>2.a)</b> | $\int_0^2 \left( f(x) - \frac{1}{e^x + 1} \right) dx = \int_0^2 (x + e^x) dx = \left( \frac{x^2}{2} + e^x \right) \Big _0^2 =$<br>$= 2 + e^2 - 1 = e^2 + 1$                                                                                                                                                                                                                 | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>b)</b>   | $\int_{-1}^1 e^x (f(x) - x - e^x) dx = \int_{-1}^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int_{-1}^1 \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} dx = \ln(e^x + 1) \Big _{-1}^1 =$<br>$= \ln(e + 1) - \ln \frac{1 + e}{e} = \ln e = 1$                                                                                                                                                                    | <b>3p</b><br><b>2p</b> |
| <b>c)</b>   | $\int_0^1 x(f(x) + f(-x)) dx = \int_0^1 x(e^x + e^{-x} + 1) dx = \int_0^1 x(e^x - e^{-x} + x)' dx = x(e^x - e^{-x} + x) \Big _0^1 -$<br>$-\int_0^1 (e^x - e^{-x} + x) dx = e - \frac{1}{e} + 1 - \left( e^x + e^{-x} + \frac{x^2}{2} \right) \Big _0^1 = \frac{5}{2} - \frac{2}{e}$<br>$\frac{5}{2} - \frac{2}{e} = \frac{m}{2} - \frac{2}{e}$ , de unde obținem $m = 5$    | <b>3p</b><br><b>2p</b> |