

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

Varianta 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Calculați termenul a_3 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_1 = 10$ și $a_2 = 20$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 4$. Arătați că $f(0) + f(1) = 10$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x - 4) = \log_2 4$.
- 5p** 4. Un produs costă 80 de lei. Determinați prețul produsului după o ieftinire cu 20%.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(0, 2)$ și $N(3, 6)$. Arătați că distanța dintre punctele M și N este egală cu 5.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A , cu $AB = 4$ și măsura unghiului C egală cu 45° . Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 8.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} a & a+3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(2)) = 9$.
- 5p** b) Arătați că $A(a) + A(-a) = 2A(0)$, pentru orice număr real a .
- 5p** c) Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a) \cdot A(-1) - aI_2) = 0$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 3X^2 + mX - 4$, unde m este număr real.
- 5p** a) Arătați că $f(0) = -4$, pentru orice număr real m .
- 5p** b) Determinați numărul real m , știind că -1 este rădăcină a polinomului f .
- 5p** c) Determinați numerele naturale m pentru care $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 5$, unde x_1 , x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 4 + \ln x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $f(x) \leq \frac{11}{4} - \ln 2$, pentru orice $x \in (0, 1]$.
2. Se consideră funcția $f: \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + \frac{6}{2x+3}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{6}{2x+3}\right) dx = e(e^2 - 1)$.
- 5p** b) Arătați că $\int_{-1}^0 (f(x) - e^x) dx = 3 \ln 3$.
- 5p** c) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g: \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (2x^2 + 3x)f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$ are aria egală cu $2(e+1)$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică $M_{tehnologic}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianța 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$r = a_2 - a_1 = 10$, unde r este rația progresiei aritmetice $a_3 = a_2 + r = 20 + 10 = 30$	2p 3p
2.	$f(0) = 4$ $f(1) = 6 \Rightarrow f(0) + f(1) = 4 + 6 = 10$	2p 3p
3.	$x - 4 = 4$ $x = 8$, care convine	3p 2p
4.	$\frac{20}{100} \cdot 80 = 16$ lei Prețul după ieftinire este $80 - 16 = 64$ de lei	2p 3p
5.	$MN = \sqrt{9 + 16} =$ $= \sqrt{25} = 5$	3p 2p
6.	$AC = 4$ $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 5 \cdot (-1) =$ $= 4 + 5 = 9$	3p 2p
b)	$A(a) + A(-a) = \begin{pmatrix} a & a+3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -a+3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} =$ $= 2 \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2A(0)$, pentru orice număr real a	3p 2p
c)	$A(a) \cdot A(-1) = \begin{pmatrix} -2a-3 & 4a+6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A(a) \cdot A(-1) - aI_2 = \begin{pmatrix} -3a-3 & 4a+6 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$, de unde obținem $\det(A(a) \cdot A(-1) - aI_2) = 3a^2 + a$, pentru orice număr real a $3a^2 + a = 0$, de unde obținem $a = -\frac{1}{3}$ sau $a = 0$	3p 2p
2.a)	$f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 + m \cdot 0 - 4 =$ $= 0 + 0 + 0 - 4 = -4$, pentru orice număr real m	3p 2p
b)	$f(-1) = -m - 2$, pentru orice număr real m $f(-1) = 0$, de unde obținem $m = -2$	2p 3p

c)	$x_1 + x_2 + x_3 = -3$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = m$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9 - 2m$, pentru orice număr natural m $9 - 2m > 5$ și, cum m este număr natural, obținem $m = 0$ sau $m = 1$	3p 2p
-----------	---	------------------------

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x} =$ $= \frac{2x^2 - 3x + 1}{x} = \frac{(2x-1)(x-1)}{x}, x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$f(1) = 2$, $f'(1) = 0$ Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$, adică $y = 2$	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ sau $x = 1$; $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ și $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ $f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice $x \in (0, 1]$ și, cum $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{4} - \ln 2$, obținem $f(x) \leq \frac{11}{4} - \ln 2$, pentru orice $x \in (0, 1]$	3p 2p
2.a)	$\int_1^3 \left(f(x) - \frac{6}{2x+3}\right) dx = \int_1^3 e^x dx = e^x \Big _1^3 =$ $= e^3 - e = e(e^2 - 1)$	3p 2p
b)	$\int_{-1}^0 (f(x) - e^x) dx = \int_{-1}^0 \frac{6}{2x+3} dx = 3 \int_{-1}^0 \frac{(2x+3)'}{2x+3} dx = 3 \ln(2x+3) \Big _{-1}^0 =$ $= 3(\ln 3 - \ln 1) = 3 \ln 3$	3p 2p
c)	$g(x) = (2x^2 + 3x)e^x + 6x$, $x \in \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$, deci $\mathcal{A} = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 ((2x^2 + 3x)e^x + 6x) dx =$ $= (2x^2 + 3x)e^x \Big _0^1 - (4x+3)e^x \Big _0^1 + 4e^x \Big _0^1 + 3x^2 \Big _0^1 =$ $= 5e - 7e + 3 + 4e - 4 + 3 = 2e + 2 = 2(e+1)$	3p 2p