

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $0,5 + 10 \cdot (1 - 0,75) = 3$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$. Arătați că $f(m) + g(-m) = m$, pentru orice număr real m .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 6} = \sqrt{5x}$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A , acesta să fie divizor al lui 30.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(2,2)$ și $C(4,0)$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic în B .
- 5p** 6. Se consideră $E(x) = 3\cos^2 x - \cos \frac{x}{2} \cdot \sin x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & -2x \\ 1 & x-6 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(6)) = 12$.
- 5p** b) Determinați numărul real a pentru care $A(4) \cdot A(4) = aA(4)$.
- 5p** c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale nenule, cu $m < n$, pentru care $\det(A(m) + A(n)) = 0$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy(x + y - xy)$.
- 5p** a) Arătați că $1 * 3 = 3$.
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $x * 2 = -x^2$.
- 5p** c) Determinați numărul întreg nenul m pentru care $\frac{1}{2m} * m = m$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x} - 3 \ln x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 3 \ln x}{x + 1} = 1$.
- 5p** c) Demonstrați că $\frac{x^2 + x - 2}{x} \leq 3 \ln x$, pentru orice $x \in (0, 2]$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + 1$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^2 (f(x) - x^3) dx = 4$.

- | | |
|-----------|---|
| 5p | b) Arătați că $\int_0^1 \frac{x^2}{f(x)-x} dx = \frac{\ln 2}{3}$. |
| 5p | c) Determinați $a \in (-\infty, 0)$, știind că $\int_a^0 e^{-x} (f'(x) - f(x)) dx = 1 - a^3 e^{-a}$. |

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$0,5 + 10 \cdot (1 - 0,75) = 0,5 + 10 \cdot 0,25 = 0,5 + 2,5 = 3$	2p 3p
2.	$f(m) = 2m - 1$, pentru orice număr real m $g(-m) = -m + 1 \Rightarrow f(m) + g(-m) = 2m - 1 - m + 1 = m$, pentru orice număr real m	2p 3p
3.	$x^2 + 6 = 5x$, deci $x^2 - 5x + 6 = 0$ $x = 2$ sau $x = 3$, care convin	2p 3p
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile În mulțimea A sunt 5 divizori ai lui 30, deci sunt 5 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{5}{9}$	2p 3p
5.	$m_{AB} = 1$ $m_{BC} = -1 \Rightarrow m_{AB} \cdot m_{BC} = -1$, deci triunghiul ABC este dreptunghic în B	2p 3p
6.	$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(6) = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(6)) = \begin{vmatrix} 6 & -12 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 6 \cdot 0 - (-12) \cdot 1 = 0 + 12 = 12$	3p 2p
b)	$A(4) = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $A(4) \cdot A(4) = \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = 2A(4)$ $aA(4) = 2A(4)$, de unde obținem $a = 2$	3p 2p
c)	$A(m) + A(n) = \begin{pmatrix} m+n & -2m-2n \\ 2 & m+n-12 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(m) + A(n)) = (m+n)(m+n-8)$, pentru orice numere naturale nenule m și n $(m+n)(m+n-8) = 0$ și, cum m și n sunt numere naturale nenule, cu $m < n$, obținem perechile $(1,7)$, $(2,6)$ și $(3,5)$	2p 3p
2.a)	$1 * 3 = 1 \cdot 3(1 + 3 - 1 \cdot 3) = 3 \cdot 1 = 3$	3p 2p
b)	$x * 2 = 2x(2 - x)$, pentru orice număr real x $2x(2 - x) = -x^2$, de unde obținem $x = 0$ sau $x = 4$	2p 3p

c)	$\frac{1}{2m} * m = \frac{2m^2 - m + 1}{4m}$, pentru orice număr real nenul m	2p
	$\frac{2m^2 - m + 1}{4m} = m$, deci $2m^2 + m - 1 = 0$ și, cum m este număr întreg nenul, obținem $m = -1$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 - 2)}{x^2} - \frac{3}{x} =$	3p
	$= \frac{x^2 + 2}{x^2} - \frac{3}{x} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}, x \in (0, +\infty)$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 3 \ln x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} =$	3p
	$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$	2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ sau $x = 2$; pentru orice $x \in (0, 1]$, $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(0, 1]$ și pentru orice $x \in [1, 2]$, $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1, 2]$, de unde obținem $f(x) \leq f(1)$, pentru orice $x \in (0, 2]$	3p
	$f(1) = -1$, deci $\frac{x^2 - 2}{x} - 3 \ln x \leq -1$, de unde obținem $\frac{x^2 + x - 2}{x} \leq 3 \ln x$, pentru orice $x \in (0, 2]$	2p
2.a)	$\int_0^2 (f(x) - x^3) dx = \int_0^2 (x + 1) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big _0^2 =$	3p
	$= \frac{2^2}{2} + 2 = 4$	2p
b)	$\int_0^1 \frac{x^2}{f(x) - x} dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{(x^3 + 1)'}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \ln(x^3 + 1) \Big _0^1 =$	3p
	$= \frac{\ln 2}{3} - \frac{\ln 1}{3} = \frac{\ln 2}{3}$	2p
c)	$\int_a^0 e^{-x} (f'(x) - f(x)) dx = \int_a^0 (e^{-x} f(x))' dx = e^{-x} f(x) \Big _a^0 = 1 - e^{-a} (a^3 + a + 1)$, unde $a \in (-\infty, 0)$	3p
	$1 - e^{-a} (a^3 + a + 1) = 1 - a^3 e^{-a}$, de unde obținem $a = -1$, care convine	2p