

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Varianta 10

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $\frac{12}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 2$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 1$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) = 6$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{4x+1} = 3$.
- 5p** 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$, acesta să fie divizibil cu 20.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 0)$, $B(8, 8)$ și $C(11, 4)$. Arătați că $AB = 2BC$.
- 5p** 6. Arătați că $1 + \sin 30^\circ = 2 \sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x & x-1 \\ -2x & 2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 2$.
- 5p** b) Arătați că $A(2) + A(0) = 2A(1)$.
- 5p** c) Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x) + xI_2) = 2$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 2(x + y) - xy - 4$.
- 5p** a) Arătați că $1 \circ 3 = 1$.
- 5p** b) Arătați că legea de compoziție „ $\circ$ ” este comutativă.
- 5p** c) Determinați numerele naturale n pentru care $n \circ n \geq n - 2$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x-1}{x^2}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{2(1-x)}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** c) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 (x^2 + x + 1) f(x) dx = 2$.
- 5p** b) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = \ln 3$.
- 5p** c) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x (x^2 + x + 1) f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$ are aria egală cu $e + 1$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 10

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\frac{12}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{12}{5} \cdot \left(\frac{3}{6} + \frac{2}{6}\right) =$ $= \frac{12}{5} \cdot \frac{5}{6} = 2$	2p 3p
2.	$f(a) = 5a + 1$, pentru orice număr real a $5a + 1 = 6$, de unde obținem $a = 1$	2p 3p
3.	$4x + 1 = 9$, de unde obținem $4x = 8$ $x = 2$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile Numerele din mulțimea A care sunt divizibile cu 20 sunt 20, 40, 60 și 80, deci sunt 4 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{4}{9}$	2p 3p
5.	$BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$, deci $AB = 2BC$	2p 3p
6.	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $1 + \sin 30^\circ = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $2 \sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-2) \cdot 0 =$ $= 2 - 0 = 2$	3p 2p
b)	$A(2) + A(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} =$ $= 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2A(1)$	3p 2p
c)	$A(x) + xI_2 = \begin{pmatrix} x & x-1 \\ -2x & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & x-1 \\ -2x & 2+x \end{pmatrix}$ și $\det(A(x) + xI_2) = 4x^2 + 2x$, pentru orice număr real x $4x^2 + 2x - 2 = 0$, de unde obținem $x = -1$ sau $x = \frac{1}{2}$	3p 2p
2.a)	$1 \circ 3 = 2(1+3) - 1 \cdot 3 - 4 =$ $= 8 - 3 - 4 = 1$	3p 2p

b)	$y \circ x = 2(y + x) - yx - 4 =$ $= 2(x + y) - xy - 4 = x \circ y$, pentru orice numere reale x și y , deci legea de compoziție „ $\circ$ ” este comutativă	2p 3p
c)	$n \circ n = 4n - n^2 - 4$, pentru orice număr natural n $4n - n^2 - 4 \geq n - 2 \Leftrightarrow -n^2 + 3n - 2 \geq 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 1$ și $n = 2$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(2x-1)' \cdot x^2 - (2x-1) \cdot (x^2)'}{x^4} = \frac{2x^2 - 2x(2x-1)}{x^4} =$ $= \frac{-2x^2 + 2x}{x^4} = \frac{2(1-x)}{x^3}, x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$f(1) = 1, f'(1) = 0$ Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$, adică $y = 1$	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1; f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (0, 1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(0, 1]$; $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1, +\infty)$	3p 2p
2.a)	$\int_0^1 (x^2 + x + 1) f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + x + 1) \cdot \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 (2x+1) dx = (x^2 + x) \Big _0^1 =$ $= 1 + 1 - 0 - 0 = 2$	3p 2p
b)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 \frac{(x^2 + x + 1)'}{x^2 + x + 1} dx = \ln(x^2 + x + 1) \Big _0^1 =$ $= \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$	3p 2p
c)	$g(x) = e^x (2x+1), x \in \mathbb{R}$, deci $\mathcal{A} = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 e^x (2x+1) dx = e^x (2x+1) \Big _0^1 - \int_0^1 2e^x dx =$ $= e^x (2x+1) \Big _0^1 - 2e^x \Big _0^1 = 3e - 1 - 2e + 2 = e + 1$	3p 2p