

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $\sqrt{2} \cdot (3 + 2\sqrt{2}) - 3\sqrt{2} + 3 = 7$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 6$. Determinați numărul real m pentru care $f(m) = 3$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{4x-2} = 5^2$.
- 5p** 4. Prețul unui obiect este 300 de lei. Determinați prețul obiectului după o ieftinire cu 30%.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(5,m)$ și $M(3,4)$. Determinați numărul real m , știind că punctul M este mijlocul segmentului AB .
- 5p** 6. Arătați că $2(\sin 45^\circ + \sin 30^\circ)(\sin 45^\circ - \sin 30^\circ) = \cos 60^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x+1 & 0 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(0)) = 0$.
- 5p** b) Arătați că $A(3) + A(5) = 2A(4)$.
- 5p** c) Determinați numerele naturale n pentru care $\det(A(n) + I_2) \geq 0$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + mX - 1$, unde m este număr real.
- 5p** a) Arătați că $f(0) = -1$, pentru orice număr real m .
- 5p** b) Arătați că $x_1 + x_2 + x_3 = 3x_1x_2x_3$, pentru orice număr real m , unde x_1 , x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .
- 5p** c) Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $X - 1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 1$.
- 5p** c) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 1)e^x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x} dx = \frac{4}{3}$.
- 5p** b) Demonstrați că funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x$ este o primitivă a funcției f .
- 5p** c) Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 2$ are aria egală cu $3(e^2 - 1)$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\sqrt{2} \cdot (3 + 2\sqrt{2}) - 3\sqrt{2} + 3 = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 3 =$ $= 4 + 3 = 7$	2p 3p
2.	$f(m) = 3m - 6$, pentru orice număr real m $3m - 6 = 3$, de unde obținem $m = 3$	3p 2p
3.	$4x - 2 = 2$, de unde obținem $4x = 4$ $x = 1$	3p 2p
4.	$\frac{30}{100} \cdot 300 = 90$ de lei Prețul după ieftinire este $300 - 90 = 210$ de lei	3p 2p
5.	$3 = \frac{1+5}{2}$ și $4 = \frac{m+1}{2}$ $m = 7$	3p 2p
6.	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ $2(\sin 45^\circ + \sin 30^\circ)(\sin 45^\circ - \sin 30^\circ) = 2\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 =$ $= 0 - 0 = 0$	3p 2p
b)	$A(3) + A(5) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} =$ $= 2 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = 2A(4)$	3p 2p
c)	$A(n) + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & n \\ n+1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & n \\ n+1 & 1 \end{pmatrix}$ și $\det(A(n) + I_2) = 2 - n(n+1)$, pentru orice număr natural n $n(n+1) \leq 2$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 0$ și $n = 1$	2p 3p
2.a)	$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + m \cdot 0 - 1 =$ $= 0 - 0 + 0 - 1 = -1$, pentru orice număr real m	3p 2p
b)	$x_1 + x_2 + x_3 = 3$ $x_1 x_2 x_3 = 1$, de unde obținem $x_1 + x_2 + x_3 = 3x_1 x_2 x_3$, pentru orice număr real m	2p 3p

c)	$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + m \cdot 1 - 1 = 1 - 3 + m - 1 = m - 3$, pentru orice număr real m $f(1) = 0$, de unde obținem $m = 3$	2p 3p
----	--	----------

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{x' \cdot (x^2 + 1) - x \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} =$ $= \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$	3p 2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ și $x = 1$; $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, -1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, -1]$; $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [-1, 1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1, 1]$ $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1, +\infty)$	3p 2p
2.a)	$\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x} dx = \int_0^1 \frac{(x^2 + 1)e^x}{e^x} dx = \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{3} + 1 - 0 - 0 = \frac{4}{3}$	3p 2p
b)	Funcția F este derivabilă și $F'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 3)e^x = (x^2 + 1)e^x$ $F'(x) = f(x)$, pentru orice număr real x, deci funcția F este o primitivă a funcției f	3p 2p
c)	$\mathcal{A} = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (x^2 + 1)e^x dx = F(x) \Big _0^2 = F(2) - F(0) =$ $= 3e^2 - 3 = 3(e^2 - 1)$	3p 2p