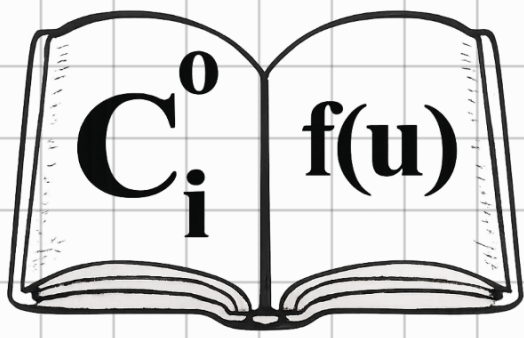




FUNCTII CONTINUE

① Functii continue într-un punct. Puncte de discontinuitate.

Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$

$x_0 \in D$, x_0 - punct de acumulare pt D .

Funcția f se numește **CONTINUĂ** în $x_0 \in D$ dacă

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Obs : ① Dacă f - continuă în x_0 atunci spunem că $x_0 =$ punct de continuitate al fct f

② Dacă f - nu este continuă în x_0 atunci spunem că $x_0 =$ punct de discontinuitate al funcției f

D: Spunem că f este **CONTINUĂ** pe o mulțime $A \subset D$ dacă f este continuă în fiecare punct din A .

Obs : Mulțimea pe care o funcție f este continuă se numește domeniul de continuitate al fct f .

f - continuă la stânga în x_0 dacă:

$$l_s(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$$

f - continuă la dreapta în x_0 dacă:

$$l_d(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$$

f - continuă în x_0 dacă:

$$l_s(x_0) = l_d(x_0) = f(x_0)$$

Notată:

$$\left\{ \begin{array}{l} l_s(x_0) \stackrel{\text{not}}{=} f(x_0 - 0) \\ l_d(x_0) \stackrel{\text{not}}{=} f(x_0 + 0) \end{array} \right.$$

D: Spunem că $x_0 \in D$ este **punct de discontinuitate de speța I** dacă limitele laterale există și sunt finite.

D: Spunem că $x_0 \in D$ este **punct de discontinuitate de speța II** dacă cel puțin o limită laterală a funcției f nu există sau este infinită.

Proprietate: Orice funcție elementară este continuă pe întreg domeniul de definiție.

Exercitii rezolvate

① Să se studieze continuitatea fct $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ în punctele specificate:

a) $f(x) = x + 2, \quad x_0 = 1.$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) = 1 + 2 = 3$$
$$f(1) = 1 + 2 = 3$$
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

$\Downarrow$

f cont în $x_0 = 1.$

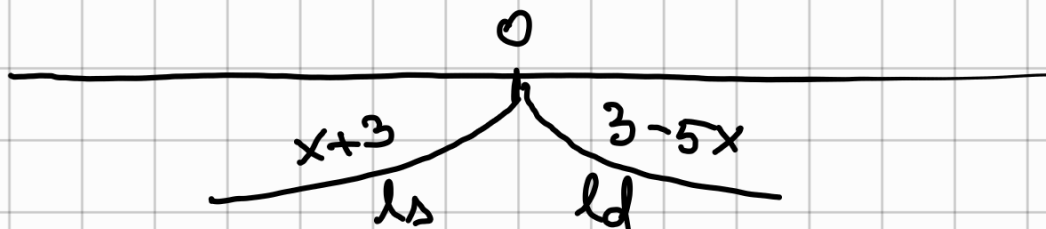
b) $f(x) = \frac{2x+3}{1-x}, \quad x_0 = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+3}{1-x} = \frac{2 \cdot (-2) + 3}{1 - (-2)} = \frac{-1}{3}$$
$$f(-2) = \frac{2 \cdot (-2) + 3}{1 - (-2)} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \neq f(-2) \Rightarrow f \text{ cont în } x_0 = -2$$

c) $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 0 \\ 3-5x, & x > 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$



Calculăm limitele laterale în $x_0 = 0$

$$l_s(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (x + 3) = 0 + 3 = 3$$

$$l_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (3 - 5x) = 3 - 0 = 3 \quad \Rightarrow$$

$$f(0) = 0 + 3 = 3$$

$$\Rightarrow l_1(0) = l_d(0) = f(0) \Rightarrow f \text{ cont in } \boxed{x_0 = 0.}$$