



EXAMENUL NAȚIONAL DE BACALAUREAT – 2025

Proba E.c)

Matematică *M_șt-nat*

Decembrie 2024

SIMULARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră numărul complex $z = 7 - i$. Arătați că $|z - iz| = 10$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 - 2x$. Determinați numărul real a pentru care $f(a+1) = f(3a) + 18$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(2x-3) = \log_2(3-x)$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr natural de două cifre, acesta să fie impar, cu cifre distincte.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,3)$ și $B(2,1)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului $[AB]$.
- 5p 6. Știind că $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\sin x = \frac{12}{13}$, calculați $\operatorname{tg} x$.

SUBIECTUL II

(30 de puncte)

1. Se consideră matricile $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & 1 \\ x^2 & x-1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(4) - I_2) = -8$.
- 5p b) Determinați numărul real x , știind că are loc egalitatea $A(x) \cdot A(2) - (x+2)A(x) = I_2$.
- 5p c) Calculați $A(1) + A(2) + A(3) + \dots + A(9)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și comutativă $x * y = 2xy - 10x - 10y + 55$.
- 5p a) Arătați că $x * y = 2(x-5)(y-5) + 5$, pentru orice x și y numere reale.
- 5p b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
- 5p c) Determinați numerele naturale m și n pentru care $m * n = 11$.

SUBIECTUL III

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{1-x}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați imaginea funcției f .
- 5p c) Arătați că $0 < f(x) + f(2-x) \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}$, pentru orice $x \in [1, +\infty)$.



2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (2-x)e^x$.

5p

a) Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x} dx = \frac{3}{2}$.

5p

b) Arătați că $\int_0^{\ln 2} f(x) dx = 3 - 2 \ln 2$.

5p

c) Determinați numărul real a astfel încât $\int_1^2 \frac{f(x)}{x(e^x + 3x^2)} dx = \ln \left(\frac{a + 4e}{a + e^2} \right)$.



EXAMENUL NAȚIONAL DE BACALAUREAT – 2025

Proba E.c)

Matematică M_{șt-nat}

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Decembrie 2024

SIMULARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z - iz = 7 - i - i(7 - i) = 7 - i - 7i + i^2 = 6 - 8i$ $ 6 - 8i = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$	3p 2p
2.	$f(a+1) = 3 - 2a$, $f(3a) = 5 - 6a$ $3 - 2a = 5 - 6a + 18$, deci $4a = 20$, avem $a = 5$	2p 3p
3.	$\log_2(2x - 3) = 2\log_2(3 - x)$, deci $2x - 3 = (3 - x)^2$ de unde obținem $x^2 - 8x + 12 = 0$ $x \in \{2, 6\}$, convine numai $x = 2$	3p 2p
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile $\overline{ab}$, $b \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ia 5 valori, $a \in \{1, 2, \dots, 9\} - \{b\}$ ia 8 valori, sunt $5 \cdot 8 = 40$ cazuri favorabile, $P = \frac{4}{9}$	2p 3p
5.	Mijlocul M al segmentului $[AB]$ are coordonatele $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 4$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 2$ Panta dreptei AB este $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1}{2}$. Panta mediatoarei d este $m_d = -2$. Ecuația mediatoarei este $y - y_M = m_d \cdot (x - x_M)$, respectiv $y = -2x + 10$	2p 3p
6.	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{25}{169}$ $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \cos x = -\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{12}{5}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(4) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 16 & 3 \end{pmatrix}$, $A(4) - I_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 16 & 2 \end{pmatrix}$ $\det(A(4) - I_2) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 16 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 16 \cdot 1 = -8$	2p 3p
b)	$A(x) \cdot A(2) = \begin{pmatrix} x+1 & 1 \\ x^2 & x-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+7 & x+2 \\ 3x^2+4x-4 & x^2+x-1 \end{pmatrix} = (x+2) \cdot A(x) = \begin{pmatrix} x^2+3x+2 & x+2 \\ x^3+2x^2 & x^2+x-2 \end{pmatrix}$ Din $A(x) \cdot A(2) - (x+2) \cdot A(x) = I_2$ deducem $\begin{pmatrix} 5-x^2 & 0 \\ -x^3+x^2+4x-4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de unde obținem $\begin{cases} 5-x^2=1 \\ -x^3+x^2+4x-4=0 \end{cases}$. Din prima ecuație se obține $x \in \{-2, 2\}$, care verifică și a doua ecuație.	2p 3p

c)	$A(1) + A(2) + A(3) + \dots + A(9) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1^2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2^2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3^2 & 2 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 9^2 & 8 \end{pmatrix} =$	2p
	$\begin{pmatrix} 2+3+4+\dots+10 & 9 \\ 1^2+2^2+3^2+\dots+9^2 & 0+1+2+\dots+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 & 9 \\ 285 & 36 \end{pmatrix}$	3p
2.a)	$x * y = 2xy - 10x - 10y + 55 = 2x(y-5) - 10y + 50 + 5 = 2x(y-5) - 10(y-5) + 5 =$	3p
	$= (2x-10)(y-5) + 5 = 2(x-5)(y-5) + 5$, pentru orice numere reale x și y	2p
b)	$x * e = e * x = x, \forall x \in \mathbb{R}$	2p
	$2(x-5)(e-5) - (x-5) = 0 \Leftrightarrow (x-5)(2e-11) = 0$, pentru orice număr real x , rezultă $e = \frac{11}{2}$	3p
c)	Legea este comutativă, rezultă $x * \frac{11}{2} = \frac{11}{2} * x = x$, pentru orice număr real x , deci $e = \frac{11}{2}$ este elementul neutru al legii „ $*$ ”	
	Din $m * n = 11$ avem $(m-5)(n-5) = 3$ $(m-5, n-5) \in \{(1,3), (3,1), (-1,-3), (-3,-1)\} \Leftrightarrow (m,n) \in \{(6,8), (8,6), (4,2), (2,4)\}$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea
(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(x+1)' \cdot \sqrt{x^2+x+1} - (\sqrt{x^2+x+1})' \cdot (x+1)}{x^2+x+1} =$	2p
	$\frac{\sqrt{x^2+x+1} - \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}(x+1)}{x^2+x+1} = \frac{1-x}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$	3p
b)	$x=1$ este punct de maxim, $f(1) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ este valoarea maximă	2p
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, f este funcție continuă, rezultă $\text{Im } f = \left[-1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$	3p
c)	Dacă $x \in [1, +\infty)$, atunci $f(x) \in \left[1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$	2p
	$x \in [1, +\infty)$, rezultă $2-x \in (-\infty, 1]$ iar $f(2-x) \in \left[-1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$. Rezultă $0 < f(x) + f(2-x) \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}$ pentru orice $x \in [1, +\infty)$	3p
2.a)	$\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x} dx = \int_0^1 (2-x) dx =$	3p
	$= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	2p
b)	$\int f(x) dx = \int (2-x)(e^x)' dx = (2-x)e^x + \int e^x dx = (3-x)e^x + C$	3p
	$\int_0^{\ln 2} f(x) dx = (3 - \ln 2)e^{\ln 2} - 3 = 3 - 2\ln 2$	2p
c)	Pentru $x \in [1, 2]$ avem:	
	$\int \frac{f(x)}{x(e^x + 3x^2)} dx = \int \frac{(2-x)e^x}{x(e^x + 3x^2)} dx = \int \frac{2(e^x + 3x^2) - x(e^x + 6x)}{x(e^x + 3x^2)} dx = \int \frac{2}{x} dx - \int \frac{e^x + 6x}{e^x + 3x^2} dx = \ln\left(\frac{x^2}{e^x + 3x^2}\right) + C$	3p
	$\int_1^2 \frac{f(x)}{x(e^x + 3x^2)} dx = \ln\left(\frac{4(e+3)}{e^2 + 12}\right) = \ln\left(\frac{a+4e}{a+e^2}\right)$, de unde obținem $a=12$	2p