



SIMULARE BAC 2026

MATE - INFO

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} ax + y + z = 2a \\ x - y + az = -4 \\ 3x + 2y + z = 8 \end{cases}$, unde a

este număr real.

5p a) Arătați că $\det(A(1)) = 4$.

5p b) Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p c) Considerăm (x_1, y_1, z_1) soluția sistemului de ecuații liniare pentru $a = 1$. Pentru $a = 2$, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului de ecuații liniare pentru care $x_0 y_0 = y_1$.

$$a) \det A(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 + 3 + 3 - 2 - 1 = 4$$

b) Dacă $\det A(a) \neq 0 \Rightarrow A(a)$ - inversabilă

$$\det A(a) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -a + 2 + 3a + 3 - 2a^2 - 1 = -2a^2 + 2a + 4$$

$$-2a^2 + 2a + 4 \neq 0 \Leftrightarrow a^2 - a - 2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+1)(a-2) \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$$

c) $a = 1 \Rightarrow (x_1, y_1, z_1)$ - sol.

$a = 2 \Rightarrow (x_0, y_0, z_0) = ?$ a. $x_0 y_0 = y_1$

$$a = 1 \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = -4 \\ 3x + 2y + z = 8 \end{cases} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 - \cancel{2} + \cancel{8} + 8 - \cancel{4} + \cancel{4} = 6$$
$$x_1 = \frac{\Delta x}{\det A} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 8 + 6 + 12 - 8 - 2 = 12$$
$$y_1 = \frac{\Delta y}{\det A} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} = -8 + 4 - 12 + 6 + \cancel{8} - \cancel{8} = -10$$
$$z_1 = \frac{\Delta z}{\det A} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}$$

Dacă $a=2 \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z=4 \\ x-y+2z=-4 \\ 3x+2y+z=8 \end{cases} \quad \det A=0$
 $\Rightarrow r \leq 2$

$$d_p = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0 \Rightarrow n=2$$

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} = -16 + 8 - 12 + 12 + 16 - 8 = 0 \Rightarrow$$

Nach $\boxed{z = \alpha} \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 = 4 - \alpha \\ x_0 - y_0 = -4 - 2\alpha \end{cases}$$

$$3x_0 / = -3\alpha \Rightarrow x_0 = -\alpha$$

$$-2x + y_0 = 4 - x \Rightarrow y_0 = x + 4$$

$$a=2 \Rightarrow (x_0, y_0, z_0) = (-\alpha, \alpha + 4, \alpha)$$

$$a=1 \Rightarrow (x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{3}{2}, 3, -\frac{5}{2}\right)$$

$$x_0 y_0 = y_1 \Rightarrow -\alpha(\alpha+4) = 3 \Rightarrow -\alpha^2 - 4\alpha - 3 = 0$$
$$\Rightarrow \alpha \in \{-3, -1\}$$

$$\alpha = -1 \Rightarrow (x_0, y_0, z_0) = (1, 3, -1)$$

$$\alpha = -3 \Rightarrow (x_0, y_0, z_0) = (3, 1, -3)$$

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt{(x^2 + 2)(y^2 + 2)} + m$, unde $m \in [-4, +\infty)$.

a) Pentru $m = 3$, arătați că $0 * 1 = 3$.

b) Pentru $m = 7$, determinați numerele reale x pentru care $x * (2x) = 5$.

c) Determinați $m \in [-4, +\infty)$ pentru care legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.

$$a) m = 3 \Rightarrow x * y = \sqrt{(x^2 + 2)(y^2 + 2)} + 3$$

$$0 * 1 = \sqrt{2(1+2)+3} = \sqrt{2 \cdot 3 + 3} = \sqrt{9} = 3$$

$$b) x * (2x) = \sqrt{(x^2 + 2)(4x^2 + 2)} + 7 = \sqrt{4x^4 + 10x^2 + 4} + 7$$

$$4x^4 + 10x^2 + 4 = 25 \Rightarrow 4x^4 + 10x^2 - 21 = 0 \quad | :2$$

$$2x^4 + 5x^2 - 7 = 0$$

$$\text{Not } x^2 = t \Rightarrow 2t^2 + 5t - 7 = 0, \Delta = 25 + 56 = 81$$

$$t_1 = \frac{-5-9}{4} = -\frac{7}{2}, \quad t_2 = \frac{4}{4} = 1$$

$$x^2 = t_1 \Rightarrow x^2 = -\frac{7}{2} \quad (\neq)$$

$$x^2 = t_2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$c) \underbrace{(x * y)}_{H_1} * z = x * (y * z), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$H_1 = \sqrt{(x^2 + 2)(y^2 + 2) + m} * z = a * z = \sqrt{(a^2 + 2)(z^2 + 2) + m}$$

$$= \sqrt{[(x^2 + 2)(y^2 + 2) + m + 2](z^2 + 2) + m}$$

$$M_2 = \sqrt{(x^2+2) \left[(y^2+2)(z^2+2) + m+2 \right] + m}$$

$$\left[(x^2+2)(y^2+2) + m+2 \right] (z^2+2) + m = (x^2+2) \left[(y^2+2)(z^2+2) + m+2 \right] + m$$

$$\cancel{(x^2+2)} \cancel{(y^2+2)} (z^2+2) + (m+2)(z^2+2) + \cancel{m} =$$

$$= (x^2+2) \cancel{(y^2+2)} (z^2+2) + (x^2+2)(m+2) + \cancel{m}$$

$$(m+2)(z^2+2) = (m+2)(x^2+2)$$

$$(m+2)(z^2 - x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad m+2=0 \quad \Rightarrow \quad m=-2$$