Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Aflați partea imaginară a numărului $z=\frac{1-2i}{1+3i}$.

5p **2.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție impară cu proprietatea $f(2)=-3$ și $f(-1)=5$. Calculați $f(0)+f(1)+f(-2)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+1}+4=2x$.

5p **4.** Determinați câte submulțimi ale mulțimii $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ conțin cel mult unul dintre elementele 5 sau 6.

5p **5.** Aflați numerele reale a pentru care vectorii $\vec{u}$ și $\vec{u}+\vec{v}$ au același modul, unde $\vec{u}=3\vec{i}-5\vec{j}$ și $\vec{v}=(a+1)\vec{i}-(a-3)\vec{j}$.

5p **6.** Arătați că funcția $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}+\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$, este constantă.

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1. Se consideră determinantul $D(x,y)=\begin{vmatrix} x & x^2+1 & 1 \\ y & y^2+1 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix}$, unde $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **a.** Calculați $D(2,-1)$.

5p **b.** Demonstrați că $D(x,y)=(x-3)(y-3)(y-x), \forall x,y\in\mathbb{R}$.

5p **c.** Aflați $a\in\mathbb{R}$ pentru care punctele $A(a,a^2+1), B(1,2)$ și $C(3,10)$ sunt coliniare.

2. Se consideră mulțimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R}, a>0\right\}$.

5p **a.** Demonstrați că dacă $A,B\in G$, atunci $A\cdot B\in G$.

5p **b.** Aflați două matrice $C,D\in G$ cu proprietatea $C\cdot D\neq D\cdot C$.

5p **c.** Arătați că orice matrice din G este simetrizabilă în raport cu înmulțirea matricelor.

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2e^x+5x^2-2x+3$.

5p **a.** Arătați că funcția f este strict crescătoare pe $[0,\infty)$.

5p **b.** Demonstrați că funcția f nu este surjectivă.

5p **c.** Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.

2. Se consideră funcțiile $f, F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(3-x)e^{-x}$ și $F(x)=(x-2)e^{-x}$.

5p **a.** Arătați că F este o primitivă a lui f.

5p **b.** Calculați primitivele funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{e^x f(x)}{x^2+1}$.

5p **c.** Aflați intervalele de concavitate și convexitate ale funcției F

Examenul naţional de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=\frac{(1-2i)(1-3i)}{1-9i^2}$	**2p**
	$z=\frac{1-5i+6i^2}{10}=-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$, deci partea imaginară este $-\frac{1}{2}$.	**3p**
2.	Deoarece funcția f este impară $\Rightarrow f(-x)=-f(x), \forall x\in\mathbb{R}$	**2p**
	Deci $f(0)=-f(0)\Rightarrow f(0)=0, f(1)=-f(-1)=-5$ și $f(-2)=-f(2)=3$ Atunci $f(0)+f(1)+f(-2)=0-5+3=-2$	**3p**
3.	Ecuația este $\sqrt{x+1}=2x-4\,\big\|^2\Rightarrow x+1=(2x-4)^2 \Leftrightarrow x+1=4x^2-16x+16$	**2p**
	$\Leftrightarrow 4x^2-17x+15=0 \Leftrightarrow x\in\left\{3,\frac{5}{4}\right\}$. Numărul 3 verifică ecuația și $\frac{5}{4}$ nu verifică deci soluția este $x=3$.	**3p**
4.	Vom afla numărul submulțimilor lui A care conțin elementele 5 și 6 și îl vom scădea din numărul total de submulțimi. Submulțimile care conțin elementele 5 și 6 sunt de forma $\{5,6\}\cup X$ unde X e o submulțime a mulțimii $\{1,2,3,4,7,8\}$, deci sunt 2^6 submulțimi.	**2p**
	În total A are 2^8 submulțimi, deci numărul căutat este $2^8-2^6=256-64=192$.	**3p**
5.	$\vec{u}+\vec{v}=(a+4)\vec{i}-(a+2)\vec{j}$	**2p**
	$\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|\Leftrightarrow\sqrt{(a+4)^2+(a+2)^2}=\sqrt{3^2+5^2}$ $\Leftrightarrow 2a^2+12a+20=34\Leftrightarrow a^2+6a-7=0\Rightarrow a\in\{-7,1\}$.	**3p**
6.	$f(x)=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}+\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}$	**3p**
	$=1-\cos x+1+\cos x=2$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, deci este constantă.	**2p**

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1.a.	$D(2,-1)=\begin{vmatrix}2 & 5 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & 10 & 1\end{vmatrix}=4-10+15-6+5-20=-12$	**5p**
b.	$D(x,y)\overset{\substack{L_1=L_1-L_3\\ L_2=L_2-L_3}}{=}\begin{vmatrix}x & x^2+1 & 1\\ y & y^2+1 & 1\\ 3 & 10 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-3 & x^2-9 & 0\\ y-3 & y^2-9 & 0\\ 3 & 10 & 1\end{vmatrix}$	**3p**
	$=(x-3)(y-3)\begin{vmatrix}1 & x+3\\ 1 & y+3\end{vmatrix}=(x-3)(y-3)(y-x)$	**2p**
c.	Punctele A,B,C sunt coliniare $\Leftrightarrow \Delta=0$, unde $\Delta=\begin{vmatrix}x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & a^2+1 & 1\\ 1 & 1^2+1 & 1\\ 3 & 10 & 1\end{vmatrix}$	
	$\overset{b.}{=}(a-3)(1-3)(1-a)$.	**3p**
	$-2(a-3)(1-a)=0\Leftrightarrow a\in\{1,3\}$	**2p**
2.a.	Fie $A,B\in G\Rightarrow A=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}c & d\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $a>0, c>0$ şi $b,d\in\mathbb{R}$	**2p**
	$A\cdot B=\begin{pmatrix}ac & ad+b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G$, deoarece $a\cdot c>0$ şi $ad+b\in\mathbb{R}$.	**3p**
b.	Pentru $C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $D=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, avem	**2p**
	$CD=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $DC=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow CD\neq DC$	**3p**
c.	Pentru $a=1, b=0$, $\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2\Rightarrow I_2\in G$, este elementul neutru pentru înmulţirea matricelor din G.	**2p**
	Matricea $A\in G$ este simetrizabilă dacă $\exists A'\in G$ cu $A\cdot A'=A'\cdot A=I_2$ Fie $A=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G$ şi $A'=\begin{pmatrix}c & d\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}ac & ad+b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ca & bc+d\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow\begin{cases}ac=1\\ ad+b=0\\ bc+d=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=\dfrac{1}{a}>0\\ d=-\dfrac{b}{a}\in\mathbb{R}\end{cases}\Rightarrow A'=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{a} & -\dfrac{b}{a}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G$, deci orice matrice din G este simetrizabilă.	**3p**

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.a.	f e derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $f'(x)=2e^x+10x-2=2(e^x-1)+10x$ Observăm că $f'(0)=0$ şi pentru $x>0 \Rightarrow e^x>1 \Rightarrow f'(x)>0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f$ e strict crescătoare pe $[0,\infty)$	**2p** **3p**
b.	Deoarece pentru $x<0 \Rightarrow e^x<1 \Rightarrow f'(x)<0, \forall x<0$. <table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$ 0 ∞</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$-------------- \quad 0+++++++++$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\searrow \quad f(0) \quad \nearrow$</td></tr></table>Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty, f(0)=5$ şi f e continuă atunci $\operatorname{Im} f=[5,\infty)\neq\mathbb{R} \Rightarrow f$ nu este surjectivă	**2p** **3p**
c.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{f(x)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{l'H}{=}} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f''(x)}{f'(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2e^x+10}{2e^x+10x-2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{l'H}{=}} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2e^x}{2e^x+10}=1$	**5p**
2.a.	F este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $F'(x)=(x-2)'e^{-x}+(x-2)(e^{-x})'$ $=e^{-x}+(x-2)(-e^{-x})=(3-x)e^{-x}$, $\forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow F$ este o primitivă a lui f.	**5p**
b.	$\int g(x)dx=\int\frac{3-x}{x^2+1}dx=3\int\frac{1}{x^2+1}dx-\int\frac{x}{x^2+1}dx$ $=3\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$	**2p** **3p**
c.	Din *a.* $F'(x)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$ Atunci F' este derivabilă şi $F''(x)=f'(x)=(3-x)'e^{-x}+(3-x)(e^{-x})'$ $=-e^{-x}-(3-x)e^{-x}=(x-4)e^{-x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Deoarece $F''(x)\geq 0, \forall x\in[4,\infty)$ şi $F''(x)\leq 0, \forall x\in(-\infty,4]$, rezultă că funcţia F este convexă pe $[4,\infty)$ şi concavă pe $(-\infty,4]$	**2p** **3p**