

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $2 \cdot (1,1+0,3) - 1,8 = 1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 4$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) = a \cdot f(0)$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2-x} = \sqrt{x^2+x-1}$.
- 5p** 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $n^3 > 10$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$, $B(2,0)$ și $C(8,2)$. Determinați distanța dintre punctul A și mijlocul segmentului BC .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $BC = 10$ și $\sin B = \frac{2}{5}$. Arătați că $AC = 4$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} 2+2x & x \\ -x & 2-2x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 1$.
- 5p** b) Arătați că $A(2) \cdot A(1) + 3A(-2) = 16I_2$.
- 5p** c) Determinați numărul întreg nenul m pentru care matricea $B(m) = \frac{1}{m} A(-m)$ este inversa matricei $A(m)$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 - 3X + a$, unde a este număr real.
- 5p** a) Pentru $a = 1$, arătați că $f(-1) = 0$.
- 5p** b) Determinați numărul real a pentru care $3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_1x_2x_3 = 3$, unde x_1 , x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f .
- 5p** c) Pentru $a = 9$, determinați rădăcinile polinomului f .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 8}{e^x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x+2)(4-x)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $-4e^2 \leq f(x) \leq e^3$, pentru orice $x \in [-3, 4]$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 6x + \frac{2 \ln x}{x}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_2^3 \left(f(x) - \frac{2 \ln x}{x} \right) dx = 15$.
- 5p** b) Arătați că $\int_1^e (f(x) - 6x) dx = 1$.

5p	c) Determinați numărul real a pentru care $\int_1^{e^2} \left(\frac{f(x)}{x} + f'(x) \ln x \right) dx = af(e^2)$.
-----------	---

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică M_{șt-nat}
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianța 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2 \cdot (1,1 + 0,3) - 1,8 = 2 \cdot 1,4 - 1,8 =$ $= 2,8 - 1,8 = 1$	2p 3p
2.	$f(0) = 4$, $f(a) = 2a + 4$, pentru orice număr real a $2a + 4 = 4a$, de unde obținem $a = 2$	2p 3p
3.	$2 - x = x^2 + x - 1$, de unde obținem $x^2 + 2x - 3 = 0$ $x = -3$ sau $x = 1$, care convin	2p 3p
4.	Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de o cifră sunt 7 numere n care verifică inegalitatea $n^3 > 10$, deci sunt 7 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{7}{10}$	2p 3p
5.	$M(5,1)$, unde punctul M este mijlocul segmentului BC $AM = 5$	3p 2p
6.	$\sin B = \frac{AC}{BC}$, deci $\frac{2}{5} = \frac{AC}{10}$ $AC = \frac{2 \cdot 10}{5} = 4$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) =$ $= 0 + 1 = 1$	3p 2p
b)	$A(2) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $A(2) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} 22 & 6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$ Cum $A(-2) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, obținem $A(2) \cdot A(1) + 3A(-2) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = 16I_2$	3p 2p
c)	$B(m)$ este inversa matricei $A(m) \Leftrightarrow A(m) \cdot B(m) = B(m) \cdot A(m) = I_2 \Leftrightarrow \frac{4-3m^2}{m} I_2 = I_2$ $\frac{4-3m^2}{m} = 1$, de unde obținem $m = -\frac{4}{3}$, care nu convine, sau $m = 1$, care convine	3p 2p
2.a)	$f = X^3 - 3X^2 - 3X + 1 \Rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1 =$ $= -1 - 3 + 3 + 1 = 0$	3p 2p
b)	$x_1 + x_2 + x_3 = 3$, $x_1 x_2 x_3 = -a \Rightarrow 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_1 x_2 x_3 = 9 + a$, pentru orice număr real a $9 + a = 3$, de unde obținem $a = -6$	3p 2p
c)	$f = X^3 - 3X^2 - 3X + 9 = (X - 3)(X^2 - 3)$ Rădăcinile polinomului sunt $x_1 = 3$, $x_2 = -\sqrt{3}$ și $x_3 = \sqrt{3}$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{2xe^x - (x^2 - 8)e^x}{(e^x)^2} =$ $= \frac{-x^2 + 2x + 8}{e^x} = \frac{(x+2)(4-x)}{e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$f(0) = -8, \quad f'(0) = 8$ Ecuția tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, adică $y = 8x - 8$	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ sau $x = 4$; pentru orice $x \in [-3, -2]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[-3, -2]$ și, pentru orice $x \in [-2, 4]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-2, 4]$ $f(-3) = e^3$, $f(-2) = -4e^2$ și $f(4) = \frac{8}{e^4} < e^3$, de unde obținem $-4e^2 \leq f(x) \leq e^3$, pentru orice $x \in [-3, 4]$	3p 2p
2.a)	$\int_2^3 \left(f(x) - \frac{2 \ln x}{x} \right) dx = \int_2^3 6x dx = 3x^2 \Big _2^3 =$ $= 27 - 12 = 15$	3p 2p
b)	$\int_1^e (f(x) - 6x) dx = \int_1^e \frac{2 \ln x}{x} dx = \int_1^e 2 \ln x (\ln x)' dx = \ln^2 x \Big _1^e =$ $= \ln^2 e - \ln^2 1 = 1$	3p 2p
c)	$\int_1^{e^2} \left(\frac{f(x)}{x} + f'(x) \ln x \right) dx = \int_1^{e^2} (f(x) \ln x)' dx = f(x) \ln x \Big _1^{e^2} = f(e^2) \ln e^2 = 2f(e^2)$ $2f(e^2) = af(e^2) \text{ și, cum } f(e^2) \neq 0, \text{ obținem } a = 2$	3p 2p