



5. Fie $(G, \star)$ un grup finit cu elementul neutru e și fie a un element al lui G . Ordinul lui a este cel mai mic număr natural n pentru care $\underbrace{a \star a \star \dots \star a}_{\text{de } n \text{ ori}} = e$. În care dintre următoarele grupuri de clase de resturi, elementul $\hat{3}$ are ordinul 3? (Am notat cu $(U(\mathbb{Z}_n), \cdot)$ grupul multiplicativ al elementelor inversabile din inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$.)

☐ A $(\mathbb{Z}_3, +)$

☐ B $(\mathbb{Z}_6, +)$

☐ C $(U(\mathbb{Z}_{10}), \cdot)$

☐ D $(U(\mathbb{Z}_{13}), \cdot)$

☐ E $(\mathbb{Z}_8, +)$

Determinăm în care grup elementul $\hat{3}$ are ordinul 3, adică

$$\hat{3}^3 = e \text{ și } \hat{3} \neq e, \hat{3}^2 \neq e$$

$$(\mathbb{Z}_3, +), \quad \mathbb{Z}_3 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}, \quad e = \hat{0}$$
$$\hat{3} = \hat{0} \Rightarrow \text{ord } \hat{3} = 1.$$

$$(\mathbb{Z}_6, +), \quad \mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}, \quad e = \hat{0}$$
$$\hat{3},$$
$$\hat{3} + \hat{3} = \hat{0} \Rightarrow \text{ord } \hat{3} = 2$$

$$(U(\mathbb{Z}_{10}), \cdot), \quad \mathbb{Z}_{10} = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{9}\}, \quad e = \hat{1}$$
$$U(\mathbb{Z}_{10}) = \{\hat{1}, \hat{3}, \hat{7}, \hat{9}\}$$
$$\hat{3}, \quad \hat{3}^2 = \hat{9}, \quad \hat{3}^3 = \hat{7}, \quad \hat{3}^4 = \hat{1} \Rightarrow \text{ord } \hat{3} = 4$$

$$(U(\mathbb{Z}_{13}), \cdot), \quad \mathbb{Z}_{13} = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{12}\}, \quad e = \hat{1}$$
$$\hat{3}, \quad \hat{3}^2 = \hat{9}, \quad \hat{3}^3 = \hat{1} \Rightarrow \text{ord } \hat{3} = 3.$$

D