

Concursul MateInfoUB
15.05.2022

1. Mulțimea tuturor valorilor parametrului a pentru care funcția

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{pentru } x \leq a \\ (x + 1)^2 & \text{pentru } x > a \end{cases}$$

este strict monotonă este:

- ☐ A $[-1; +\infty)$ ☐ B $\{-1; 0\}$ ☐ C $\emptyset$ ☐ D $\{-1\} \cup [0; +\infty)$ ☐ E $\{0\} \cup [1; +\infty)$

2. Mulțimea tuturor valorilor parametrului real m pentru care $x^2 + mx + 1 > 0$ pentru orice număr real $x > 0$ este:

- ☐ A $(-2; +\infty)$ ☐ B $(-2; 2)$ ☐ C $\{-2; 2\}$ ☐ D $(0; +\infty)$ ☐ E $\mathbb{R}$

3. Produsul soluțiilor reale ale ecuației $x^2 + 18x + 30 = 2\sqrt{x^2 + 18x + 45}$ este egal cu:

- ☐ A 30 ☐ B 45 ☐ C 20 ☐ D 720 ☐ E 36

4. Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2, & \text{dacă } x \leq 0 \\ x^3 - 3x^2, & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$. Numărul punctelor de inflexiune ale acestei funcții este:

- ☐ A 0 ☐ B 1 ☐ C 2 ☐ D 3 ☐ E 4

5. Tangentele în punctele de abscisă a și b la graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ sunt perpendiculare. Atunci produsul ab are valoarea:

- ☐ A $-0,25$ ☐ B -1 ☐ C 1 ☐ D $-0,5$ ☐ E $0,25$

6. Fie $f : (-1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{pentru } x \neq 0, x > -1 \\ 1 & \text{pentru } x = 0 \end{cases}$. Atunci:

- ☐ A f nu este derivabilă în 0 ☐ B $f'(0) = 0$ ☐ C $f'(0) = 1$ ☐ D $f'(0) = -\frac{1}{2}$ ☐ E $f'(0) = -\frac{5}{6}$

7. Dreapta de ecuație $3x + y - 9 = 0$ intersectează segmentul cu capetele $A(1; 3)$ și $B(2; 7)$ în punctul M . Valoarea raportului $\frac{AM}{BM}$ este:

- ☐ A $\frac{3}{4}$ ☐ B $\frac{2}{3}$ ☐ C $\frac{3}{5}$ ☐ D $\frac{1}{2}$ ☐ E $\frac{5}{7}$

8. Fie z o rădăcină complexă a ecuației $x^6 + x^3 + 1 = 0$, care are argumentul θ în intervalul $(90^\circ; 180^\circ)$. Atunci θ este egal cu:

- ☐ A 160° ☐ B 150° ☐ C 140° ☐ D 120° ☐ E 135°

9. Pentru un inel $(A, +, \cdot)$ notăm $(U(A), \cdot)$ grupul elementelor inversabile ale inelului, în raport cu operația de înmulțire. Care dintre grupurile următoare este izomorf cu grupul $(U(\mathbb{Z}_5), \cdot)$?

- ☐ A $(U(\mathbb{Z}_4), \cdot)$ ☐ B $(U(\mathbb{Z}_6), \cdot)$ ☐ C $(U(\mathbb{Z}_8), \cdot)$ ☐ D $(U(\mathbb{Z}_{10}), \cdot)$ ☐ E $(U(\mathbb{Z}_{12}), \cdot)$

10. Fie $P(X)$ un polinom de grad cel mult 3 cu coeficienți reali astfel încât $P(1) = 2, P(2) = 3, P(3) = 4, P(4) = 17$. Atunci $P(5)$ este egal cu:

- ☐ A 54 ☐ B 6 ☐ C 408 ☐ D 18 ☐ E 30

11. Fiecărui număr de 9 cifre $\overline{a_1 \dots a_9}$ îi asociem determinantul $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix}$. Suma tuturor determinantilor asociați astfel numerelor de 9 cifre este:

- ☐ A un număr de forma $9k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) ☐ B 999 ☐ C alt răspuns ☐ D -1 ☐ E 2022

12. Considerăm funcția

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x| + |x - 1| + \dots + |x - 50|.$$

Valoarea minimă a acestei funcții este:

- ☐ A 650 ☐ B 0 ☐ C 1300 ☐ D 25 ☐ E 50

13. Valoarea integralei $\int_0^\pi \frac{x \sin^6 x}{\sin^6 x + \cos^6 x} dx$ este:

- ☐ A $\frac{\pi^2}{4}$ ☐ B $\frac{\pi}{4}$ ☐ C $\frac{\pi^2}{2}$ ☐ D 1 ☐ E $-\pi$

14. Fie $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă și mărginită astfel încât $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = 9$. Atunci $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ este:

- ☐ A 9 ☐ B 3 ☐ C 1 ☐ D Nu există ☐ E 0

15. În patrulaterul convex $ABCD$ notăm cu O intersecția diagonalelor. Știm că ariile triunghiurilor AOB, BOC și COD sunt 2, 3 respectiv 6 (fiind exprimate în aceeași unitate de măsură). Cât este aria patrulaterului?

- ☐ A 15 ☐ B 12 ☐ C 11 ☐ D 36 ☐ E 22

16. Valoarea produsului $\sin(10^\circ) \cdot \sin(50^\circ) \cdot \sin(70^\circ)$ este:

- ☐ A $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ B $\frac{\sqrt{2}}{11}$ ☐ C $\frac{1}{4}$ ☐ D $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ☐ E $\frac{1}{8}$

17. Un șir de numere naturale $(x_n)_{n \geq 1}$ este definit după cum urmează: $x_1 = 1$, iar pentru fiecare număr natural $n \geq 1$, x_{n+1} este egal cu cel mai mare număr care poate fi obținut prin permutarea cifrelor numărului $x_n + 1$. Cel mai mic număr natural n pentru care scrierea în baza 10 a lui x_n conține exact 10 cifre este:

- ☐ A 9876543210 ☐ B 1000000000 ☐ C 496 ☐ D Nu există un astfel de număr n ☐ E 406

18. Fie a un număr real. Definim funcția $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_a(x) = |x| + |ax + 1|$. Pentru câte valori ale lui a graficul funcției f_a admite o axă de simetrie?

- ☐ A 3 ☐ B 1 ☐ C 0 ☐ D O infinitate ☐ E 16

19. Dacă $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ și $(a + 4)^b = a^c$ atunci valoarea raportului $\frac{b}{c}$ este:

- ☐ A $\frac{2}{3}$ ☐ B $\frac{1}{2}$ ☐ C $\frac{3}{4}$ ☐ D $\frac{1}{4}$ ☐ E $\frac{5}{3}$

20. Pentru un număr real pozitiv a notăm $I(a) := \int_{-a}^{a+1} [x]dx$, unde $[t]$ este partea întreagă a numărului real t ; obținem astfel funcția $I : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, a \mapsto I(a)$. Mulțimea valorilor acestei funcții este:

- ☐ A $\{0\}$ ☐ B $\mathbb{R}$ ☐ C $[0; +\infty)$ ☐ D $\mathbb{N}$ ☐ E $\mathbb{Z}$

21. Fie $a \in \mathbb{R}$ și $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ astfel încât f admite primitive pe $\mathbb{R}$. Atunci

- ☐ A $a = 0$ ☐ B $a = \frac{1}{2}$ ☐ C $a = \frac{3}{8}$ ☐ D $a = 1$ ☐ E $a = -2$

22. Considerăm șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = 2$ și $a_{n+1} = \ln(a_n + 1), \forall n \geq 1$. Atunci limita șirului $(na_n)_{n \geq 1}$ este:

- ☐ A 2 ☐ B 1 ☐ C 0 ☐ D $+\infty$ ☐ E e

23. Cele patru vârfuri ale unui paralelogram desenat în planul cartezian se află pe graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 3x + 1$. Atunci centrul paralelogramului este punctul ale cărui coordonate sunt:

- ☐ A $(1, 0)$ ☐ B $(0, 2)$ ☐ C $(0, 1)$ ☐ D $(-1, -3)$ ☐ E $(1, 1)$

24. Considerăm patrulaterul convex $ABCD$ astfel încât $\widehat{BAD} = 45^\circ, \widehat{ADC} = \widehat{ACD} = 75^\circ, AB = CD = 1$. Lungimea laturii BC este :

- ☐ A $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ☐ B $\sqrt{2}$ ☐ C 2 ☐ D $1 + \sqrt{3}$ ☐ E 1