

SIMULARE EXAMEN BACALAUREAT

Matematică M_tehnologic, noiembrie 2023

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

Subiectul I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați partea reală a numărului complex $z = 3 + 2(1 - i)$.
- 5p 2. Determinați valoarea minimă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 10$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2 \log_5(x - 3) = \log_5(x - 1)$.
- 5p 4. Numărul submulțimilor cu două elemente ale unei mulțimi este egal cu 10. Determinați numărul elementelor mulțimii.
- 5p 5. Se consideră punctele A, B, C, astfel încât $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + \vec{j}$ și $\overrightarrow{BC} = \vec{i} - \vec{j}$.
Calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.
- 5p 6. Determinați aria triunghiului MNP, știind că $MN=12$, $MP=3$ și $m(\sphericalangle M) = 30^\circ$.

Subiectul al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det A = 5$;
- 5p b) Să se demonstreze că matricea A verifică relația: $A^2 - 2A + I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$;
- 5p c) Să se afle matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ știind că $A \cdot X = B$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție: $x \circ y = xy - 3(x + y) + 12$, pentru orice x și y numere reale.
- 5p a) Să se arate că $2 \circ 0 = 6$;
- 5p b) Să se arate că legea “ $\circ$ ” este comutativă;
- 5p c) Să se rezolve ecuația $x \circ x = 4$.

Subiectul al III-lea

(30 de puncte)

-
1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}$.
- 5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă 1.
- 5p c) Demonstrați că funcția este crescătoare pentru orice $x \in [4, \infty)$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & x \leq 0 \\ e^x + 2, & x > 0 \end{cases}$.
- 5p a) Arătați că f admite primitive.
- 5p b) Arătați că orice primitivă este concavă pe $(-\infty, 0)$.
- 5p c) Calculați $\int x \cdot f(x) dx$, pentru $x \in [0, \infty)$.

SIMULARE EXAMEN BACALAUREAT

Matematică M_tehnologic, noiembrie 2023

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

SUBIECTUL I

1.	$z = 3 + 2(1 - i) = 5 - 2i$ $\operatorname{Re}(z) = 5$	2p 3p
2.	$\Delta = 44.$ Valoarea minimă a funcției f este egală cu $-\frac{\Delta}{4a} = -11$	2p 3p
3.	$(x - 3)^2 = x - 1 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$ $x_1 = 2$ nu verifică ecuația și $x_2 = 5$ verifică ecuația.	3p 2p
4.	Numărul de submulțimi cu 2 elemente este $C_n^2 = 10$ $C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$ $\frac{n(n-1)}{2} = 10 \Rightarrow n(n-1) = 20 \Rightarrow n = 5$	2p 2p 1p
5.	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 3\vec{i}$ $AC = \overrightarrow{AC} = 3$	3p 2p
6.	$A_{\Delta MNP} = \frac{MN \cdot MP \cdot \sin(\sphericalangle M)}{2}$ $A_{\Delta ABC} = \frac{12 \cdot 3 \cdot \sin 30^\circ}{2} = 9.$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) =$	3p
------	---	----

	$= 4 + 1 = 5$	2p
b)	$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$	2p
	$-2A = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$	2p
	$A^2 - 2A + I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	1p
c)	Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ cu a, b, c, d numere reale	
	$A \cdot X = B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$	3p
	Obținem $2a + c = -1$; $-a + 2c = 3$; $2b + d = 4$; $-b + 2d = 3$	
	De unde $a = -1, b = 1, c = 1, d = 2$, așadar $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	2p
2.a)	$2 \circ 0 = 2 \cdot 0 - 3 \cdot (2 + 0) + 12 =$	3p
	$= 0 - 6 + 12 = 6$	2p
b)	$y \circ x = yx - 3(y + x) + 12 =$	3p
	$= xy - 3(x + y) + 12 = x \circ y$, pentru orice x și y numere reale, deci legea “ $\circ$ ” este comutativă	2p
c)	$x \circ x = x^2 - 6x + 12$, x număr real	3p
	Ecuția devine $x^2 - 6x + 8 = 0$ cu soluțiile $x = 2$ și $x = 4$	2p

SUBIECTUL al III-lea

1.a)	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} =$	3p
	$\frac{\sqrt{x} - 2}{2x}$	2p

b)	Ecuatia tangentei este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$; $f(1) = 1$; $f'(1) = -\frac{1}{2}$ $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1); y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$	3p 2p
c)	$f'(x) = 0$, $x = 4$ $f'(x) > 0$, pentru $x > 4$, deci f crescătoare pe $[4, \infty)$.	2p 3p
2.a)	f continuă pe $\mathbb{R} - \{0\}$ ca fiind funcții elementare, $l_s(0) = l_d(0) = f(0) = 3$ f continuă pe $\mathbb{R}$, f admite primitive	3p 2p
b)	Fie F o primitivă a lui f, $F'(x) = f(x) = x^2 - 4x + 3$; $F''(x) = f'(x) = 2x - 4$ Pentru $x < 0$, avem $F''(x) < 0$, deci F concavă pe $(-\infty, 0)$	3p 2p
c)	$\int x \cdot f(x) dx = \int x(e^x + 2) dx = \int x e^x dx + \int 2x dx =$ $\int x(e^x)' dx + 2 \frac{x^2}{2} = x e^x - \int e^x dx + x^2 = x e^x - e^x + x^2 + C$	2p 3p